第二回　研究課題

課題 1　次の問題に答えなさい。

[1]　放物線　$y=-x^2$　・・・　①　と直線　$y=-2x+k$　$(k>1)$　・・・　②　がある。放物線①の上の点と、直線②との距離の最小値が 1 となるように定数 k の値を定めなさい。

[2]　次の2つの不等式を同時に満たす点(x, y)の存在範囲を図示しなさい。

$$x-2y+2\leq 0 \quad , \quad y\leq |x^2-4|$$

[3]　関数　$y=\cos^2 x+\sin x+1$ の最大値と最小値を求めなさい。

[4]　a を実数とする。不等式　$\sin^4\theta-2a\sin^2\theta+a^2+3a<0$　を満たす θ が　$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$　の範囲に存在するような a の値の範囲を求めなさい。

[5]　関数　$f(\theta)=a\cos^2\theta+(a-b)\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta$　の最大値が $3+\sqrt{7}$ 、最小値が $3-\sqrt{7}$ となるように a, b の値を定めなさい。

[6]　次の方程式・不等式を解きなさい。

(1)　$4^x-3\cdot 2^x+2=0$　　　(2)　$9^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

(3)　$4(\log_2 x)^2-16\log_4 x+3=0$　　　(4)　$2^{\log_{10}x}-\frac{1}{4}x^{\log_{10}4}=0$

[7]　次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を定めなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=6$　　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-bx+8}{x^2-(2+a)x+2a}=\frac{1}{5}$

[8]　3次曲線　$y=x^3-3x^2-7x+1$　の接線で傾き 2 のものが 2 つある。

(1)　これらの接線の方程式を求めなさい。　(2)　これらの接線の間の距離を求めなさい。

[9]　3次方程式　$2x^3-3x^2-12x+a=0$　の解が、2 つの異なる負の数と 1 つ正の数であるための a の条件を求めなさい。

[10]　次の各問いに答えなさい。

(1)　関数　$y=-x^4+4x^3-5$　の極値を求め、グラフの概形を書きなさい。

(2)　関数　$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$　の　$-1\leq x\leq 1$　における最大値と最小値を求めなさい。

[11]　次の定積分の値を求めなさい。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{3}|x^2+x-6|\,dx$　　　(2)　$\displaystyle\int_{-2}^{3}(|x^2-1|+x^2+3)\,dx$

[12]　曲線　$y=x^3-2x$　について、次の各問に答えなさい。

(1)　点$(0, 2)$を通り、この曲線に接する直線 l の方程式を求めなさい。

(2)　直線 l とこの曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい。

第二回　研究課題

$\boxed{\text{課題 2}}$　次の問題に答えなさい。

[1]　次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$　　　(2)　$x(x+1)(x+2)(x+3) = 24$

[2]　α，β は複素数で、$\alpha^2 + \beta^2 = 0$　とする。このとき、$|\alpha + \beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2$　の値を求めなさい。

[3]　次の方程式を解きなさい。

(1)　$z^3 = -i$　　　(2)　$z^2 = 2(1 + \sqrt{3}\,i)$

[4]　$\vec{a} = (-3, 2),\ \vec{b} = (2, 1)$　とする。 $|\vec{a} + t\vec{b}|$　を最小にする t　の値と、そのときの最小値を求めなさい。

[5]　ベクトル $\vec{a} = (1, 2),\ \vec{b} = (2, 1)$　に対し、$x\vec{a} + y\vec{b}$ と $\vec{a}$　のなす角が　45°　で、$\vec{a} + x\vec{b}$ と $\vec{b}$ が直交するとき、$x,\ y$ の値を求めなさい。

[6]　$\vec{a} = (1, 2, -1),\ \vec{b} = (-1, x, 0)$　のなす角が 45°　であるような実数 x の値を求めなさい。

[7]　事象 A と B は互いに独立で、$P(A \cup B) = \dfrac{17}{32}$，$P(A \cap B) = \dfrac{3}{32}$，$P(A) < P(B)$ のとき、$P(A)$　の値を求めなさい。

[8]　10%　の割合で不合格品を含む同じ製品の1つの山がある。いま、この中から任意に 4 個を取り出し、それに含まれる不合格品に個数を X で表すとき、X の確率分布の表を作り、X の期待値と標準偏差を求めなさい。

第二回　研究課題

$\boxed{\text{課題 3}}$　次の各問題に答えなさい。

[1]　三角形 ABC の外接円の半径を R とする。AB = c, BC = a, CA = b とおくとき、三角形 ABC の面積 S は次の式で与えられることを証明しなさい。

$$S = \frac{abc}{4R}$$

（ヒント：頂点 A から対辺 BC へ下ろした垂線の足を D とするとき、AD×2R = bc を示す。）

[2]　三角形 ABC の内心を I とする。O を原点とし、AB = c, BC = a, CA = b とおくとき、次の式を証明しなさい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

第二回　研究課題

課題 4　次の書籍を読み、特に面白そうであると思った章を精読し、その内容の要約･感想を述べなさい。

スチュアート･ホリングデール著, 岡部恒治監訳

「数学を築いた天才たち（上･下）」

講談社ブルーバックス

（上下とも 1100 円程度、上 ISBN:4061329898, 下 ISBN:4061329901）