

第一回 研究課題

課題 1 次の問題に答えなさい。

[1] 関数 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ のグラフを描き、最小値を求めなさい。

[2] 次の二つの放物線の頂点が一致するように a, b の値を求めなさい。

$$y = 2x^2 - 4x + 1 \quad y = ax^2 - 2x + b$$

[3] $x + 2y = 3$ のとき、 $2x^2 + y^2$ の最小値を求めなさい。

[4] $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 2$ のとき、 $x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めなさい。

[5] 2次方程式 $kx^2 + (3k+1)x + 2(k+1) = 0$ の解(実数解)の個数を求めなさい。ただし、 k は定数とする。

[6] $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ とするとき、次の各問に答えなさい。

(1) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ のとき、 $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \tan \alpha$ の値を求めなさい。

(2) $\tan \alpha = 3$ のとき、 $\frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \sin \alpha}$ の値を求めなさい。

[7] $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の方程式を解きなさい。

$$(1) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \tan \theta = \sqrt{3} \quad (3) 2\cos \theta + \sqrt{3} = 0$$

[8] 2次方程式 $x^2 \cos \theta + 2x \sin \theta + \cos \theta = 0$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) の解がすべて正であるように、 θ の値の範囲を求めなさい。

[9] $\angle A = 120^\circ$, $AB = 3$, $AC = 1$ である三角形 ABC の $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき、線分 AD の長さを求めなさい。

[10] 次の三角形 ABC において、 $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ のとき、面積 S と辺 CA に対する高さ h を求めなさい。

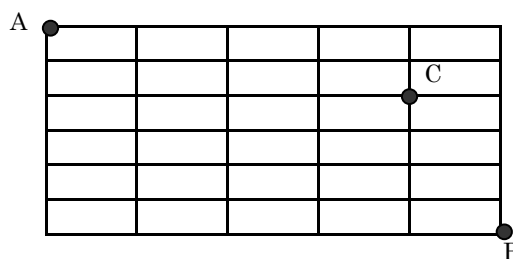
[11] 100 から 200 までの自然数のうち、(1) 3 の倍数の和、(2) 3 の倍数であるが 5 の倍数でない自然数の和はいくらになるか求めなさい。

[12] 504 の約数について次の各問に答えなさい。

(1) これらの約数は全部でいくつあるか。 (2) (1)の約数の総和を求めなさい。

第一回 研究課題

[13] 下の図は、東西 7 本、南北 6 本の道からなる街の地図である。このとき、次の間に答えよ。



(1) A 地点から B 地点まで行く最短経路は
いくつあるか。

(2) そのうち、C 地点を通らない最短経路は
いくつあるか。

[14] 12 本のくじの中に当たりくじが 3 本含まれている。同時に 2 本引くとき、少なくとも 1 本は当たりくじである確率を求めなさい。

[15] 表の出る確率が p 、裏の出る確率が $1-p$ であるような硬貨を 10 枚同時に投げるとき、表の出る枚数が n である確率を P_n とする。ただし、 $0 < p < 1$ である。次の間に答えなさい。

(1) P_n を求めなさい。

(2) $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{10}$ のうち P_6 が最大になるために、確率 p が満たさなければならない範囲を求めなさい。

第一回 研究課題

課題 2 次の問題に答えなさい。

[1] x の整式 P を $P = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$ とする。

(1) $t = x^2 - 3x$ とおいて、 P を t で表しなさい。

(2) (1)を利用して、 P を因数分解しなさい。

[2] $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ のとき、次の式の値を求めなさい。

(1) $x^2 - xy + y^2$ (2) $x^3 + y^3$

[3] $a - 2b + 2c + 1 = 0$, $3a + 2b - 6c + 1 = 0$ を満たすどんな実数 a, b, c に対しても、等式 $a^2x + b^2y + c^2z = 1$ が成立するという。このときの x, y, z の値を求めなさい。

[4] 次の各問に答えなさい。

(1) $x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $2x + 3y$ の最大値, 最小値を求めなさい。

(2) $x > 1$ のとき、 $x + \frac{1}{x-1}$ の最小値を求めなさい。

[5] $xy - x - 2y + 4 = 0$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) をすべて求めなさい。

[6] 次の和を求めなさい。

(1) $\sum_{k=1}^n (3k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^n (6k^2 - 2k + 3)$ (3) $6 \sum_{i=1}^n i(n-i)$

[7] 次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

$a_1=1, a_2=2, 2a_{n+1} - a_n - a_{n-1} = 0$

[8] 次の式を展開しなさい。

(1) $(a+b)^8$ (2) $(2x-y)^6$

第一回 研究課題

課題 3 次の「3次多項式、4次多項式の判別式」についての問題に答えなさい。

2次の多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は実数) に対して $f(x) = 0$ の2つの根を α_1, α_2 とするとき

$$D(f) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = a^2 - 4b$$

を $f(x)$ の判別式という。3次の多項式、4次の多項式の判別式も同様に定義される。

[1] 3次の多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数) に対して、 $f(x) = 0$ の3つの根を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とするとき

$$D(f) = \{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)\}^2$$

3次の多項式 $f(x)$ の判別式という。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $D(f) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ と分解されることを用いて

$$D(f) = -f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)f'(\alpha_3)$$

であることを示せ。

(2) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ において、 $y = x + \frac{a}{3}$ とおくことにより

$$f(x) = g(y) = y^3 + py + q$$

と表されることを示し、 p, q を a, b, c を用いて表せ。

(3) (2) の $g(y) = y^3 + py + q = (y - \beta_1)(y - \beta_2)(y - \beta_3)$ の判別式について

$$D(g) = D(f) \text{ で } D(g) = -(4p^3 + 27q^2)$$

であることを示せ。更に、 $D(f)$ を a, b, c を用いて表せ。

(4) 3次の方程式 $f(x) = 0$ が実数根のみをもつための必要十分条件は $D(f) \geq 0$ であることを示せ。

(5) 2つの多項式 $g(x) = x^3 - 3x + 1$ と $h(x) = x^3 - 3x + 3$ について (4) のことを確かめよ。

[2] 4次の多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d は実数) に対して、 $f(x) = 0$ の4つの根を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とするとき

$$D(f) = \{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4)\}^2$$

を4次の多項式 $f(x)$ の判別式という。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ において、 $y = x + \frac{a}{4}$ とおくことにより

第一回 研究課題

$$f(x) = g(y) = y^4 + py^2 + qy + r$$

と表されることを示し, p, q, r を a, b, c, d を用いて表せ。

- (2) (1)の $g(y) = y^4 + py^2 + qy + r$ について, 方程式 $g(y) = 0$ の4つの根を $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ とし

$$\theta_1 = (\beta_1 + \beta_2)(\beta_3 + \beta_4), \theta_2 = (\beta_1 + \beta_3)(\beta_2 + \beta_4), \theta_3 = (\beta_1 + \beta_4)(\beta_2 + \beta_3)$$

とおくとき, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は方程式

$$h(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 - 4r)X + q^2 = 0$$

の根であることを示せ。

- (3) (1)の $f(x), g(y)$ と(2)の $h(X)$ の判別式について

$$D(f) = D(g) = D(h)$$

であることを示せ。

- (4) $D(f)$ を a, b, c, d を用いて表せ。
- (5) 4次の多項式 $f(x)$ について $D(f) > 0$ ならば方程式 $f(x) = 0$ の根は実数根のみであることがいえるか? いえるならば証明し, いえないならば例をあげよ。

第一回 研究課題

課題 4 次のいずれかの書籍を精読し、読書後の感想と興味を持った具体的な問題や内容・項目などについて書き、自分なりの考察を加えなさい。

出版社名	日本評論社
書籍名	数学 1・2・3... ∞ 高校からの数学入門
著者名	小針暁宏/著
出版年月	1996 年 6 月
ISBN コード	4-535-78232-6
価格	2,520 円 (税込)

出版社名	日本評論社
書籍名	すべての人に数学を 対話・現代数学入門
著者名	小針暁宏/著
出版年月	1998 年 9 月
ISBN コード	4-535-78265-2
価格	2,100 円 (税込)