令和 6 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科
博士前期課程　理学専攻数理情報科学プログラム
一般選抜 筆答試験 第 2 次募集

数学

令和 6 年 2 月 8 日　 13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分がそれぞれ収束することを示せ.

$$\text{(i)}\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \qquad \text{(ii)}\ \int_1^{\infty} e^{-x^3}\,dx \qquad \text{(iii)}\ \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

(2) 次の関数の最大値, 最小値を求めよ.

$$f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2} \qquad (-2 \leq x \leq 2).$$

(3) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の各問いに答えよ.

(1) 次の重積分 I_1, I_2 をそれぞれ求めよ.

$$I_1 = \iint_{D_1} (3x+2y)\,dxdy, \qquad D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

$$I_2 = \iint_{D_2} xy\,dxdy, \qquad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(2) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = x^4 + y^2 + 2x^2 - 4xy$ を考える.

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ を満たす $\mathbb{R}^2$ の点 (a,b) を全て求めよ.

(ii) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ とする．i を虚数単位とするとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなすとき, $\{1, i\}$ がその基底となることを示せ.

(2) $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, 複素数に α をかける写像 $z \mapsto \alpha z$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への ($\mathbb{R}$-) 線形写像となることを示せ.

(3) $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) としたとき, (1) の基底に関する (2) の線形写像の表現行列を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ U, V を実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. $T\colon U \to V$ を線形写像とし, U の 4 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ が次の二つの条件を満たすとする.

- $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{Ker}(T)$ であり, さらに, これらは 1 次独立.
- $T(\boldsymbol{u}_3), T(\boldsymbol{u}_4) \in V$ は 1 次独立.

このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) 4 個の実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ が $\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{u}_3 + \alpha_4 \boldsymbol{u}_4 = \mathbf{0}$ を満たせば $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ となることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_4$ が 1 次独立となることを示せ.