令和4年度
鹿児島大学大学院理工学研究科
博士前期課程　理学専攻数理情報科学プログラム
一般選抜 筆答試験

数学

令和3年8月19日　13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ π を円周率とし，開区間 $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right)$ 上で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

を考える．

(1) $x = 0$ における f の微分係数 $f'(0)$ を求めよ．

(2) $x \neq 0$ の範囲における f の導関数を求めよ．

(3) $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ なる実数 ε をどの様にとっても，開区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ において f は（広義）単調増加にならないことを示せ．

(4) f の導関数 f' が閉区間 $\left[\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}}, 0\right]$ において Riemann 積分可能かどうか判定し，もし Riemann 積分可能であるならば積分値

$$\int_{\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}}^{0} f'(t)dt$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 多変数関数についての以下の問いに答えよ．

(1) xy-平面全体で定義された関数

$$f(x, y) = 1 + 4(x - 1) - 2(y + 1) + |x - 1|(y + 1)$$

を考え，$\mathrm{P}_0 = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ とおく．

(i) f の点 P_0 における偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{P}_0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{P}_0)$ を求めよ．

(ii) f が点 P_0 において微分可能かどうか判定せよ．

(2) 次の広義積分が収束するかどうか判定し，もし収束するのであればその値を求めよ．

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}\,(x^2 + y^2)^2}\, dxdy$$

ただし，$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\}$ とする．

(3) xy-平面全体で定義された関数

$$f(x, y) = -x^2 - 2xy + 6x - 2y^2 + 8y - 7$$

について，その極値を全て求めよ．

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ とこれにより定まる 3 次元実数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について考える．

(1) ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は固有値 c に属する T の固有ベクトルである．c を求めよ．

(2) -2 は T の固有値であることを示せ．

(3) T の固有値 -2 の固有空間の次元と 1 組の基を求めよ．

(4) A が対角化されるか調べ，対角化できるならば対角化せよ．

$\boxed{4}$ U, V を体 K 上のベクトル空間，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を U の基，$T\colon U \to V$ を線形写像とするとき次を示せ．

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{0}\}$ ならば T は単射である．(ただし，$\mathrm{Ker}(T)$ は T の核とする．)

(2) T が単射ならば $T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), T(\boldsymbol{u}_3)$ は 1 次独立である．

(3) T が全射ならば $T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), T(\boldsymbol{u}_3)$ は V を生成する．

(4) 写像 $H\colon V \to U$ が $H \circ T = I_U$，$T \circ H = I_V$ をみたすとき H は線形写像である．(ただし，I_U は U 上の恒等写像，I_V は V 上の恒等写像とする．)