平成 31 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻
数学

平成 30 年 8 月 20 日　　13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の極限値をそれぞれ求めよ.

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$$

ここで $y=\arcsin x$ は, $\arcsin 0 = 0$ をみたすような $x=\sin y$ の逆関数である.

(2) α と β を正の実数とする. 広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ が収束するような α の範囲を決定せよ. さらに広義積分

$$\int_0^1 \frac{x-\sin x}{x^{3+\beta}}\,dx$$

が収束するような β の範囲を決定せよ.

(3) $\mathbf{R}$ 上微分可能な関数 f が, 任意の実数 x, a に対して

$$\frac{f(x)+f(a)}{2} = f\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

をみたすとする. このとき, ある定数 c, d が存在して $f(x) = cx + d$ $(x \in \mathbf{R})$ となることを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の積分の値をそれぞれ求めよ.

(i) $\displaystyle\iint_D xy\sin(x^2+y^2)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\le x\le\sqrt{\pi},\quad 0\le y\le\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\}$

(ii) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid 0\le x^2+y^2\le 1,\quad \sqrt{3}\,|y|\le x\}$

(2) 平面 $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)=x^2+y^2+y^3$ について考える.

(i) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(ii) p を正の実数とする. 閉領域 $D(p)$ を, 原点を中心とする半径 p の円の円周とその内部とする. $f(x,y)$ の $D(p)$ における最小値が -18 となるとき, p の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3 次元実数ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の標準的な内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表し，また任意の $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^3$ のノルムを $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle}$ で定義する．このとき 3 次直交行列 T について, 次の各問いに答えよ．

(1) T はベクトルのノルムを保つ，すなわち $\|T\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{a}\|$ を満たすことを示せ．

(2) 任意の零ベクトルでない $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角は $T\boldsymbol{a}$ と $T\boldsymbol{b}$ のなす角に等しいことを示せ．

(3) T が

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & x\\ -\sqrt{3} & 0 & y\\ 1 & z & w\end{pmatrix}$$

で与えられているとき，x,y,z,w を求めよ．ただし，$x>0$ とする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値 λ,μ に対して，行列 $P,\ Q$ を $A=\lambda P+\mu Q$ により定義する．ただし，$\lambda<\mu$ であって $P+Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする．このとき

(i) P と Q を求めよ．

(ii) P^2 と Q^2 を求めよ．

(iii) PQ と QP を求めよ．

(3) 自然数 n に対して A の冪乗 A^n を求めよ．