平成 27 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成 27 年 2 月 12 日 (木)　　13:00–16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を計算せよ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 「V が実ベクトル空間で V_1, V_2 が V の部分空間ならば $V_1 \cup V_2$ も V の部分空間である」という命題は偽である. 反例となる V, V_1, V_2 の具体例をあげよ. そして実際にその場合に $V_1 \cup V_2$ が V の部分空間にならないことを示せ.

(3) $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ を内積の定義された実ベクトル空間 V の元とする. 次がなりたつなら $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ は一次独立である. このことを示せ.

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{y}, \vec{y}) = (\vec{z}, \vec{z}) = 2, \qquad (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{z}, \vec{x}) = 1.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) V を 4 次の複素正方行列全体のなす複素ベクトル空間とする. V 上の線型変換 f を $f(A) = 2A + {}^t\!A$ と定める（ここで ${}^t\!A$ は A の転置行列）. このとき 3 は f の固有値である. このことを示せ.

(2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

から決まる線型写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \vec{v} \mapsto A\vec{v}$ の核 $\operatorname{Ker} f$ と像 $\operatorname{Im} f$ について, 次を示せ:

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R},\ x - 2y + z = 0 \right\}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$　関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) を含む領域 D で偏微分可能であり, その偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ は D で連続であると仮定する. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 平均値の定理を応用し, $f(x,y)-f(a,y)$ を偏導関数 f_x と $0<\theta_1<1$ なる θ_1 を用いて表せ.

(2) 平均値の定理を応用し, $f(a,y)-f(a,b)$ を偏導関数 f_y と $0<\theta_2<1$ なる θ_2 を用いて表せ.

(3) $f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+r(x,y)$ とおく. (1), (2) の結果を用いて $r(x,y)$ を表せ. さらに次を示せ.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{|r(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}=0.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$　球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ について, 次の各問いに答えよ. ただし $a>0$ とする.

(1) $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ とおくとき, 偏導関数 f_x と f_y を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の定義域を D とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$ を計算せよ.

(3) 円柱面 $x^2+y^2=ax$ で切り取られる球面の部分集合の表面積を求めよ.