平成26年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成25年8月20日(火)　13:00-16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3枚), 解答用紙 (B4, 4枚), 草案用紙 (B4, 4枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の4題で, 4題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次の行列 A, B について，それぞれの行列式の値を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & -2 \\ 9 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) a, b, c を実数とし，3次正方行列 C を

$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

と定める．$C^2 = E_3$ となるような a, b, c の値の組 (a, b, c) をすべて求めよ．

ただし，E_3 は3次の単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を表す．

(3) n を正の整数とする．n 次正方行列 M に対して，次の各問いに答えよ．
ただし，E_n は n 次の単位行列を表す．

(i) 正の整数 m に対して，積 $(M - E_n)(M^{m-1} + M^{m-2} + \cdots + M + E_n)$ を展開せよ．

(ii) M がべき零であるとは，ある正の整数 m が存在して M^m が零行列となるときをいう．
M がべき零ならば，$M - E_n$ は必ず正則となることを示せ．逆行列も明記すること．

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次のベクトル空間 V の次元と，ひと組の基底を求めよ．

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

(2) 次の $\mathbf{R}^3$ の部分集合 W が，$\mathbf{R}^3$ の部分ベクトル空間にならない理由を述べよ．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 \geq -2 \right\}$$

$\boxed{3}$ 実数全体 R 上で定義された次の関数 $f(x)$ を考える.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

以下の各問いに答えよ. ただし, 次の等式を用いてよい.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x)$ は R 上で有界であることを示せ.

(3) $f(x)$ は R 上で C^1-級であるかどうか調べよ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 2 次元ユークリッド空間 R^2 上で定義された次の関数 $f(x, y)$ を考える.

$$f(x, y) = xye^{-x-y}$$

以下の各問いに答えよ.

(1) $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ となる点 (x, y) をすべて求めよ.

(2) 判別式 $D(x, y) = \left(f_{xy}(x, y)\right)^2 - f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$ を計算し, $f(x, y)$ の極値とその極値をとる点をすべて求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y)\, dxdy$ を求めよ.