平成25年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成24年8月21日(火)　13:00-16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の行列式を計算せよ:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 11 & 11 \\ 1 & 11 & 111 & 111 \\ 1 & 11 & 111 & 1111 \end{pmatrix}.$$

(2) 次の複素行列の階数を求めよ:

$$\begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2i & -1+i \end{pmatrix}.$$

(3) 実数 a_{ij} を (i,j) 成分とする n 次正方行列 A と実数 b_{ij} を (i,j) 成分とする n 次正方行列 B に対して, その積 AB を「$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ を (i,j) 成分とする n 次正方行列」と定義する（もっと一般の型の行列に積は定義できるが, ここでは簡単のため正方行列のみを考える）. また実数 c_{ij} を (i,j) 成分とする n 次正方行列 C に対して, その転置 ${}^tC$ を「c_{ji} を (i,j) 成分とする n 次正方行列」と定義する. 実数を成分とする n 次正方行列 X, Y に対して, ${}^t(XY) = {}^tY\,{}^tX$ が成立する. このことを行列の積と転置の定義に即して証明せよ.

$\boxed{2}$ V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. f を V から W への線型写像, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ を V の元とする. 次を証明せよ（「…とは限らない」というものについては反例になるような V, $W, f, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ をあげたらよい）.

(1) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ が一次独立でも $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ が一次独立とは限らない.

(2) f が単射で $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ が一次独立なら $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ も一次独立である.

(3) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ が一次従属なら $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ も一次従属である.

(4) f が全射で $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ が V を生成するなら $f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)$ は W を生成する.

$\boxed{3}$ 平面 $\mathbb{R}^2$ の閉領域 I_n と D_n を次で定義する.

$$I_n := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| \leqq n,\ |y| \leqq n\right\},\quad D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqq n^2\right\}$$

ただし, n は自然数とする. このとき関数 $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ について, 次の各問に答えよ.

(1) 閉領域 I_n と D_n を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$ を求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx = K_n$ とおくとき, $\displaystyle\iint_{I_n} f(x,y)dxdy$ を K_n で表せ.

(5) $D_n \subset I_n \subset D_{2n}$ を利用して積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について, 次の各問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ は原点で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の x に関する第1次偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の x に関する第2次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$ は原点で連続であるか調べよ.