平成24年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成24年2月14日(火)　13:00-16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 4 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の4題で, 4題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{1}$ 標準的な３次元内積空間 $\mathbb{R}^3$ の二つのベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が直交するように定数 a を定めよ．

(2) (1) のとき，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の張る長方形の面積を求めよ．

(3) 任意の実数 θ に対して行列 A を $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ により定める．

(1) のとき，$A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の張る平行四辺形の面積を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^2$ を２次元実数ベクトル空間とする．また A は２次の実正方行列とし，相異なる実数の固有値 α_1 と α_2 を持つと仮定する．α_1 と α_2 に対応する固有空間を V_1 と V_2 で表しておく．単位行列 I に対して，行列 P_1 と P_2 を

$$P_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_2 I), \quad P_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(A - \alpha_1 I)$$

により定義する．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $P_1 + P_2 = I$ と $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = A$ を示せ．

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2)$ と表すとき，次を示せ．

(i) $P_1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$，$P_2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$

(ii) $P_1\boldsymbol{v}_2 = P_2\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$．ここで $\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルである．

(3) (2) を利用して次の各行列を求めよ．

(i) P_i^2 $(i = 1, 2)$

(ii) P_1P_2，P_2P_1

(4) $A^n = \alpha_1^n P_1 + \alpha_2^n P_2$ を証明せよ．

$\boxed{3}$ 平面上の閉領域 D を

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

と定義する. 以下の2変数関数 $f(x,y)$ に対して重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

を求めよ.

(1) $f(x,y) = xe^{xy}$ (2) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & (x^2 \geqq y) \\ y & (x^2 < y) \end{cases}$

$\boxed{4}$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

と定義する. 以下の各問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において連続でないことを示せ.

(2) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において x と y について偏微分可能であることを示し, $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ.