平成23年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成22年8月24日(火)　13:00-16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3枚), 解答用紙 (B4, 4枚), 草案用紙 (B4, 4枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の4題で, 4題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{1}$ a, b を実数とし，$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ 3 & b & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする．

次の各問いに答えよ．但し，O は零行列を表すものとする．

(1) $\operatorname{rank} A$ を求めよ

(2) $AB = O$ が成り立つための a, b に関する条件を求めよ

(3) $AB = O$ が成立しているとき，次のことが成り立つための a に関する条件を求めよ

$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるすべての $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して，

連立方程式 $\begin{cases} 3x_1 + ax_2 + 4x_3 = y_1 \\ 3x_1 + bx_2 + 4x_3 = y_2 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = y_3 \end{cases}$ は解を持つ．

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値を求めよ

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対する固有空間の基底を求めよ

(3) ${}^tPAP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ

(4) 関数 $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$ に対して，次のような直線の方向ベクトルを 1 つ挙げよ

(x, y, z) が原点を通るある直線上を動くとき，常に $f(x, y, z) = 0$ が成立する．

$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y)=(xy-2)e^{x+y}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ となる点 (a,b) を求めよ

(3) $f(x,y)$ の 2 階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ

(4) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ について，次の各問いに答えよ．

(i) 定数 $a>0$ に対して，$D_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqq a^2\}$ とおく．

このとき，極座標を利用して重積分 $\displaystyle\iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を計算せよ

(ii) 広義積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ を計算せよ

(2) $\mathbb{R}^2$ の領域 $D(n)$ を $D(n)=[-n,n]\times[-n,n]$ により定義する．

また，$I(n)=\displaystyle\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx$ とおく．このとき，$D(n)$ における重積分

$$\iint_{D(n)} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

を $I(n)$ で表せ

(3) (1) の結果を利用して広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を求めよ