詰め込み複体 vs トーラス階数複体

さくらセミナー２０１３
高知大学教育学部　山口俊博

1. 背景

単連結で有限有理ホモロジーを持つＣW複体 X に対して、(有理) **トーラス階数**というトポロジー不変量 $r(X)$ は、どれだけ大きな次元 n のトーラス*T^n が空間 X（と同じ有理ホモトピー型の空間）にほとんど自由に作用できるか？というものである。例えば、2n 次元球面 S^{2n} には S^1 は自由に作用できないので、$r(S^{2n}) = 0$ となる。一方、奇数次元球面の直積に対しては $r(S^{2n_1+1} \times \cdots \times S^{2n_k+1}) = k$ である。一般に $r(X)$ の評価は難しく、例えば S.Halperin の予想「$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 2^{r(X)}$?」は、多くの研究者が部分的に示し続けているものの、いまだ未解決である ([FOT])。

約１０年前 S.Halperin によって発見された、トーラス階数に関する不等式 $r(X \times S^{2n}) > r(X) + r(S^{2n}) = r(X) = 0$ [JL] は意外性があり、このような現象についてもっと詳しく知りたいと思った [Y2]。その過程で

定理１：どんなに大きい偶数 n に対しても、$r(X_n) = 0$ だが $r(X_n \times S^{6n+1}) \geq n$ となる空間 X_n が存在する

ことも最近わかった。いわば、X_n のような空間は潜在的なトーラス階数を有しており、球面という触媒によって、化学反応をおこしている感じである。

あわせて、X における自由なトーラス作用の分類をしたいと思った [Y1]。そうでない（不動点のある）場合のトーラス作用の分類は、Puppe[P] による不動点の数や形によるハッセ図が知られている。しかし、自由な作用では不動点はない。ただ様々な軌道空間のトーラス階数達があるのみである。$r(X)$ はホモトピー不変な非負整数（量）であるが、有限の値を持つとき、系統樹に葉や実がついたような**トーラス階数複体**という有限ＣW複体 $\mathcal{T}(X)$ が自然に現れてくる（§5）。トポロジー的観点から、自由なトーラス作用の豊富さは、$\mathcal{T}(X)$ によって、

「幹† $\leq$ **木** $\leq$ **平面的** $\leq$ **可縮** $<$ S^2 $< \vee_i S_i^2$ $<$ $\cdots$ **」**　　**(a)**

のようになろう [Y2]。 とりあえず、やせ具合（a の左方向）と X の関係が気になる。

定理２：（１）$1 < m \leq n$ において、$\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \pi_m(X) \otimes \mathbb{Q} \oplus \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ とする。もし、$2m + 2 > n$ なら $\mathcal{T}(X)$ は可縮。とくに $2m + 1 > n$ なら「幹」。
（２）$\mathrm{rank}\pi_*(X) \leq 4$ なら、$\mathcal{T}(X)$ は平面的。とくに $\mathrm{rank}\pi_*(X) \leq 3$ なら「木」。

のように十分条件はいくつか挙げられるが、必要条件はよくわかっていない。この $\mathcal{T}(X)$ は不変量 $r(X)$ に伴う自然な不変形であるが、座標も考慮したとき、もっと詳しい情報を持っている。例えば

---

*n **次元トーラス** $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$　(n 個の直積) は、$n = 2$ のとき浮き輪と同じ。

†が「幹」(§3 参照) のとき、X を r_0-**formal** 空間と呼んでいる。

定理３ ([SY])：X がある (pre-c-symplectic‡という) 幾何的な性質をもつなら、図形 $\mathcal{T}(X)$ は xy 座標 $(r(X)-1,1)$ の頂点を持つ。

本講演では、この「不変量」$r(X)$ と「不変形」$\mathcal{T}(X)$ の関係について、日常的な「詰め込み (packing)」という例を交えて解説する。最後に §6 において（定理３に関連して)、作成中の [HYY] の X 上の c-symplectic 半順序構造にも触れたい。

§5 と §6 は、**有理ホモトピー論**における話題であり、全て有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の **Sullivan の極小モデル**で語られる ([FHT])。

2. どんな「不変量」か？

対象 X に対して決まる非負整数の不変量 $c(X)$ であって、２つの対象 X と Y に対し、$X \bigcirc Y$ という対象があり、常に $c(X \bigcirc Y) \geq c(X) + c(Y)$ をみたすものとする。

対象 X には、広い意味での「詰め込み（a とか書く)」という操作があって、$Y = X; a$ という別の対象がきまる。$c(X) > c(X; a)$ であり、対象 $X; a$ に、さらに詰め込み b を施す（$a \cap b = \phi$）と別の対象 $Z = X; a, b$ ができ、$c(X; a) > c(X; a, b)$ となる。$\cdots c(X) = n$ とは、ある n 個の詰め込み $a_1, .., a_n$ があって、$c(X; a_1) = n-1$、$c(X; a_1, a_2) = n-2$、$\cdots$ $c(X; a_1, a_2, .., a_n) = 0$ となり、どんな $n+1$ 個の詰め込み $b_1, .., b_{n+1}$ に対しても $c(X; b_1, b_2, .., b_{n+1})$ は定義できない§。

3. どんな「不変形」か？

対象 X が不変量 $c(X)$ をもつとき、CW複体 $C(X)$ は、xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の第１象限の格子点のみに有限個の頂点をもつ。少なくとも頂点 $P_0 = (0,0)$、$P_1 = (0,1)$、$\cdots$、$P_{c(X)-1} = (0, c(X)-1)$ そして $P_{c(X)} = (0, c(X))$ を必ずもち、それらは $P_0 - P_1 - \cdots - P_{c(X)}$ というふうに辺でつながっている。これを「**幹**」という。$C(X)$ の「**高さ**」は $c(X)$ である。他の格子点にも頂点はありえて、辺でつながっている。さらに４辺形には面が張り付いて４角形になっているかもしれない。頂点の座標はゆずれないが、辺も面も曲がっていてもいい。さらに、それらを面とする３次元キューブもあるかもしれない。退化の具合によって出現しやすさに差があるだろう。

4. （日常の）詰め込み複体

（点でない）形 x のものを（有界な）領域とか容器 X に入る最大個数を、**詰め込み数** $c(X, x)$ ということにする。x も X も堅くて変形できないし、x を X の中にいったん入れると動かせない。$c(X, x)$ は、x と X の比のみに依存する（トポロジー的ではない）不変量である。きちんと入れないと $c(X, x)$ 個は入らないことは、幼児でも知っている。最も「おおちゃく」な入れ方では、もう入らなくなるかもしれない。$c(X, x)$ が既知のとき、入れ方の可能性の全体を示す有限CW複体を次のように作る。

まず、「n 個をある入れ方 $a = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ で入れたとき、まだあと $c(X, x) - m_i - n$ 個入る（つまり $c(X - a, x) = c(X, x) - m_i - n$）」ときに、座標 (m_i, n) の点 P_i が存在する。なので $(0,0)$ は（基点として）必ず存在する。(0 次元)

次に、さらにもう一個、（$a \cap b = \phi$ となる）入れ方 b で入れて座標 $(m_j, n+1)$ の点 P_j になるとき、P_i と P_j の間に辺がある。当然 $m_i \leq m_j$ である。(1 次元)

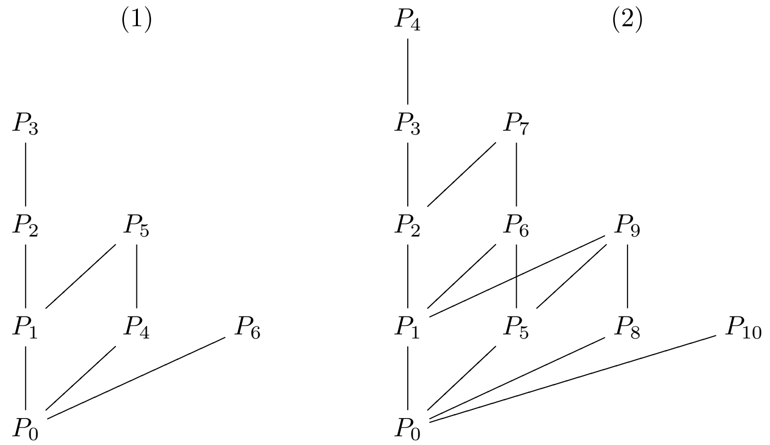
さらにもう一個入れ方 c で入れて $(m_k, n+2)$ の点 P_k になるとき、四辺形 $P_i P_j P_k P_l$ を張る面がある。当然 $m_j \leq m_k$ である。ここで、P_l は、a のあと c でいれた点 $(m_l, n+1)$ である。ただし $P_j = P_l$ $(m_j = m_l)$ なら２辺のままである。(2 次元)

‡全空間が symplectic 多様体になるようなファイブレーション $X \to Y \to K(\mathbb{Z}, 2)$ が存在する (有理ホモトピー的な) 必要条件

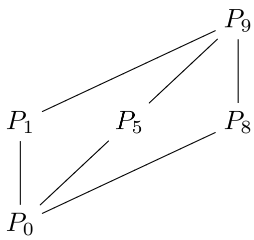
§X が単連結でない場合ときの $r(X)$ や、代数 A における積の長さ $\mathrm{nil} A$(コホモロジー環では cup length のこと) 等は、うまくいかない。

このようにして三次元、四次元と続けていってできる CW 複体を X の x による**詰め込み複体** $C(X,x)$ と定義する。

例えば、縦 × 横= 1 × 3 の長方形 $x = \boxed{}$ があるとする[¶]。これを、縦 × 横= 3 ×t の長方形の容器 X_t（$0 < t \in \mathbb{R}$）に順次入れていく。$c(X_t, x) = [t]$（t 以下の最大の整数）であることは明らかだろう。詰め込み複体 $c(X_t, x)$ は



のようになる。ここで高さ 3 の (1) は $3 \leq t < 4$、高さ 4 の (2) は $4 \leq t < 5$ のときの詰め込み複体である。ただし (2) おいて、$t = 4$ のときは $P_0P_1P_9P_5$ のみには面は張っておらず、残りの全ての 4 辺形に面が張り付いているので $C(X_t, x)$ は可縮であるが、$t > 4$ では、$P_0P_1P_9P_5$ にも面が張り、3 つの（四角形の）面からなる紙風船



$\cong$ S^2 ：膨らますと球面

ができるので、$C(X_t, x)$ は 2 次元球面のホモトピー型を持つ。この $C(X_t, x)$ は、t を連続的に大きくしていったとき、どのように（トポロジー的に不連続に）成長していくのだろうか？

一方、縦 × 横=1×t の長方形 Y_t だと、$C(Y_t, x)$ は t がいくら大きくなっても可縮（高々 2 次元）のまま。というのは、x を Y_t に（ずらして入れることはあっても）ななめに入れたりできないので、$C(Y_t, x)$ には傾きが 1 より小さい辺はなく、せいぜい (1) の $\square P_0P_1P_5P_4$ と同じ形の平行四角形を（タイルのように）平面的に敷き詰めたものになるからである。

詰め込み複体 $C(X, x)$ のトポロジーの観察によって、x から見た X の大きさや形をある程度推し量れるだろう。

[¶]市販の JENGA という積み木 (タカラ・トミー) はそうなっている

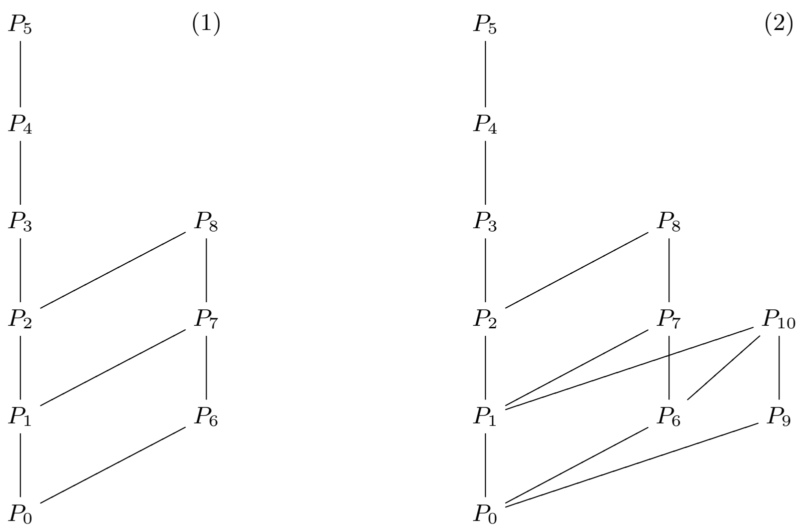
5. トーラス階数複体

自由な T^t-作用による軌道空間 Y_i で、$r_0(Y_i) = r_0(X) - s - t$ なるものがあるとき、xy 座標が (s,t) なる 点 P_i が存在する。なお、$P_0 = (0,0)$ は X それ自身。ある頂点 P_i とある頂点 P_j の間には、Y_j は Y_i のある S^1-作用による軌道空間であるとき、辺 P_iP_j が存在する。２次元以降もこんな感じで定義していく$\cdots$（省略)。これを X の**トーラス階数複体** $\mathcal{T}(X)$ と定義する [Y1]。

定理 4 ([Y1])：高さが３の複体は１０個あり、そのうち (少なくとも) ４個は $\mathcal{T}(X)$ として実現できる。(あとの６個は不明)

定理 5 ([Y2])：X が奇数次球面の直積や Lie 群などのとき、xy 座標で $x = 1$ の直線上には $\mathcal{T}(X)$ の頂点は存在しない。

は役に立つであろう。例えば、$X_k = S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^7 \times S^k$（$k = 3, 5, 7, 9, ...$）において、$r(X_k) = 5$ であり、$\mathcal{T}(X_k)$ は

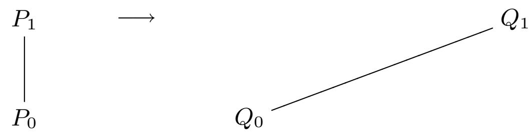


のように与えられる。点の座標は、$P_0 = (0,0)$、$P_1 = (0,1)$、$P_6 = (2,1)$、$P_9 = (3,1)$、$\cdots$である。ここで $k = 3$ か 5 のとき (1) となり、$k = 7$ か 9 のとき (2) となるが、$k = 7$ のときは、$P_0P_1P_{10}P_6$ のみには面は張っていないので可縮。一方、$k = 9$ のときは $P_0P_1P_{10}P_6$ にも面が張っており、２次元球面のホモトピー型を持つ。$k > 9$ のときは、$\mathcal{T}(X_9)$ に、頂点 $P_{11} = (4,1)$ と辺 P_0P_{11} が加わるのみ。

一方、$Y_k = S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^k$ だと、$\mathcal{T}(Y_k)$ は k がいくら大きくなっても可縮（高々２次元）のままである。§4 の例との相関関係を見てほしい。

定理 6 ([Y1])：$X \overset{i_X}{\hookrightarrow} X \times Y$ から誘導される $\mathcal{T}(i_X) : \mathcal{T}(X) \hookrightarrow \mathcal{T}(X \times Y)$ は、「幹」$P_0 - P_1 - \cdots - P_{r(X)}$ が「ななめに」入っているなら、$r(X \times Y) > r(X) + r(Y)$ となる。

例えば、定理１の場合、



ただし $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (0,1)$, $Q_0 = (0,0)$ そして $Q_1 = (m,1)$ $m \geq n$ となっている。ちなみに $r(X \times Y) = r(X) + r(Y)$ であっても、$\mathcal{T}(\ )$ では、そんなことは期待できない。実際

定理７：もし $\mathcal{T}(X \times Y) = \mathcal{T}(X) \vee \mathcal{T}(Y)$ なら、$\mathcal{T}(X)$、$\mathcal{T}(Y)$、$\mathcal{T}(X \times Y)$ の３つとも「幹」。つまり、大概、左辺は右辺を真に（余裕をもって）含む。

問題： (1) $\mathcal{T}(X)$ は単連結（穴が空いていない）か？
　(2) $\mathcal{T}(X)$ はいくつかの球面の１点和とホモトピー同値か？

6. 図形の対称性 vs X 上のコホモロジーシンプレクティック構造

　多角形（四角形なら、正方形、長方形、ひし形、平行四辺形、台形など) や多面体の対称性は、合同変換（自己同型）群達の部分群としての半順序構造によって分類、記述されることは、群論の講義などでよく見受ける　⋯

　話は変わって、D.Sullivan の「単連結なシンプレクティック多様体は、その Sullivan 有理モデルにどのような制約を与えているか？」という問いに対し、例えば Lupton-Oprea は「そのときモデルは formal([FHT]) になりやすい」と指摘したが、後に反例が見つかった ([FOT])。最近、[SY] では、コホモロジーシンプレクティック空間[‖]Y を

$$\mu : X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} K(\mathbb{Z},2) \qquad (1)$$

とファイブレーションに分解することによって、Y そのものでなく、X の特徴付けを考察した。例えば、定理３もその１つである。（１）の有理モデルは

$$(\mathbb{Q}[t],0) \to (\mathbb{Q}[t] \otimes \Lambda V, D) \to (\Lambda V, d) = M(X)$$

と書かれる。ファイバーとなる単連結空間 X を固定したまま、コホモロジーシンプレクティックになる (1) の Y の同型類の集合は、ある自然な半順序構造 $\mathcal{P}(X)$ を持っている ([HYY])：

定義１. $X_{\mathbb{Q}}$ を X の有理化とし、$\mathcal{E}(X_{\mathbb{Q}})$ を $[X_{\mathbb{Q}}, X_{\mathbb{Q}}]$ の中でホモトピー逆元を持つもののなす群とする。(1) の p に対し、

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\mu(X_{\mathbb{Q}}) &:= \ \mathrm{Im}\ res(\ \mathcal{E}(p_{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{E}(X_{\mathbb{Q}})\ ) \\ &= \ \mathrm{Im}\ proj_t(\ Aut_t(\mathbb{Q}[t] \otimes \Lambda V, D) \to Aut(\Lambda V, d)\ )\end{aligned}$$

と定義する。ここで、群 $\mathcal{E}(p_{\mathbb{Q}})$ は

$$\begin{tikzcd} X_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "i_{\mathbb{Q}}"] \arrow[d, "f"'] & Y_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "p_{\mathbb{Q}}"] \arrow[d, "g"] & K(\mathbb{Q},2) \arrow[d, equal] \\ X_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "i_{\mathbb{Q}}"] & Y_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "p_{\mathbb{Q}}"] & K(\mathbb{Q},2) \end{tikzcd} \quad : \quad res(g) = f \in \mathcal{E}(X_{\mathbb{Q}})$$

[‖]$H^*(Y;\mathbb{Q})$ はポアンカレ双対性を持ち、$H^2(Y;\mathbb{Q})$ のある元 a で a^n は基本類になるものが存在するもの。

を可換にするような g で、ホモトピー逆元を持つもの。このとき、半順序集合 $\mathcal{P}(X) = (\{[\mu]\}, \leq) = (\{[Y]\}, \leq)$ を、$\mathcal{E}(X_{\mathbb{Q}})$ の部分群達における自然な半順序集合 $(\{\mathcal{E}_\mu(X_{\mathbb{Q}})\}, \subset)$ によって与える。

定義2. X の（コホモロジーシンプレクティックな）「深さ」を、$\mathrm{depth}(X) = \max\{n|\ [\mu_1] > [\mu_2] > \cdots > [\mu_n]\ \}$ で定義する。

例：(1) $X = S^{2n+1}$ なら、$\mathcal{P}(X) = \{[\mathbb{C}P^n]\}$ よって $\mathrm{depth}(X) = 1$。
(2) $X = S^3 \times S^5 \times S^7$ なら、$\mathcal{P}(X) = \phi$ よって $\mathrm{depth}(X) = 0$。
(3) $X = S^3 \times S^5 \times S^9$ なら、$\mathrm{depth}(X) = 1$。実際、$M(X) = (\Lambda(v_1, v_2, v_3), 0)$ $|v_1| = 3$, $|v_2| = 5$, $|v_3| = 9$, $M(Y) := (\mathbb{Q}[t] \otimes \Lambda(v_1, v_2, v_3), D)$, $Dv_1 = Dv_2 = 0$, $Dv_3 = v_1v_2t + t^5$ としたとき、

$$\mathrm{Im}\ proj_t(\ Aut_t(\mathbb{Q}[t] \otimes \Lambda(v_1, v_2, v_3), D) \to Aut(\Lambda(v_1, v_2, v_3), 0)\ )$$
$$= \{(a, a^{-1}, 1);\ a \in \mathbb{Q}^*\} \subsetneq \{(a, b, c);\ a, b, c \in \mathbb{Q}^*\} = (\mathbb{Q}^*)^{\times 3} = Aut(\Lambda V, 0)$$

よって $\mathcal{P}(X) \supset \{[Y]\}$。逆の $\subset$ は容易。
(4) 例外 Lie 群 E_7 において、有理型から、$\mathrm{depth}(E_7) = 4$ が計算できる。

§1 の (a) と「深さ」との関係が気になる。また、

問い：「深さ」は LS-category によって上から抑えられているか？

7. 参考文献

[FHT] Y.Félix, S.Halperin and J.C.Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics **205**, Springer-Verlag, 2001
[FOT]Y.Félix, J.Oprea and D.Tanré, *Algebraic models in geometry*, Oxford G.T.M. **17** [2008]
[H]S.Halperin, *Rational homotopy and torus actions*, London Math. Soc. Lecture Note Series **93**, Cambridge Univ. Press (1985) 293-306
[HYY]K.Hamada,T.Yamaguchi and S.Yokura, *C-symplectic poset structure on a simply connected space*, preprint
[JL]B.Jessup and G.Lupton, *Free torus actions and two-stage spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137**(1) (2004) 191-207
[P]V.Puppe,*Cohomology of fixed sets and deformation of algebras*, Manuscripta math. **23** (1978) 343-354
[SY] J.Sato and T.Yamaguchi, *Pre-c-symplectic condition for the product of odd-spheres*, J. Homotopy Relat. Struct. (2012)
[Y1] T.Yamaguchi, *A Hasse diagram for rational toral ranks*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **18** (2011) 493-508
[Y2] T.Yamaguchi, *Examples of rational toral rank complex*, Int. J. Math. Math. Sci. (2012) Art. ID 867247

E-mail address: tyamag@kochi-u.ac.jp