$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 1000 以下の自然数全体の集合を全体集合とする。その中で 4 の倍数全体の集合を A とし，7 の倍数全体の集合を B とする。集合 $\overline{A} \cap B$ の要素の個数を求めよ。

(2) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $y = \left|\cos x + \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2}$ のグラフを描け。ただし，x 軸，y 軸との共有点，最大値，最小値およびそのときの x の値も記入すること。

(3) 2 次方程式 $x^2 - 5x + 9 = 0$ の 2 つの解を α，β とおくとき，$\alpha^2 - 1$，$\beta^2 - 1$ という 2 つの数を解とする 2 次方程式を作れ。

(4) 定積分を利用して極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1 枚のコインを 8 回続けて投げる。

(1) 表がちょうど 3 回出る確率を求めよ。

(2) 表がちょうど 5 回出て，しかもそのうちちょうど 4 回が連続する確率を求めよ。

(3) 表が 5 回以上続けて出る確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$　平行六面体 ABCD-EFGH を考える。線分 BF 上に点 P，線分 DH 上に点 Q があり $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = s\overrightarrow{\mathrm{BF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ を満たす。さらに線分 EP と線分 EQ を 2 辺とする平行四辺形のもう 1 つの頂点を R とする。このとき次の各問いに答えよ。ただし線分はその両端を含むものとする。

(1) R は直線 GC 上にあることを示せ。

(2) R が線分 GC 上にない場合を考える。直線 BC と直線 PR の交点を S，直線 DC と直線 QR の交点を T とする。

(i) 座標平面上に点 (s, t) の取り得る範囲を図示せよ。

(ii) 線分 BS と線分 SC の長さの比を s と t を用いて表せ。

(iii) S が辺 BC を 5 : 3 に内分し，T が辺 DC を 2 : 3 に内分する。s と t を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$　初項を $a_1 = 6$，$b_1 = 1$ とし，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える。

$$a_{n+1} = 9a_n + 9b_n$$
$$b_{n+1} = -4a_n - 3b_n$$

このとき次の各問いに答えよ。

(1) 数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を $c_n = 2a_n + 3b_n$，$d_n = a_n + b_n$ で定めるとき，

$$c_{n+1} = \alpha c_n + \beta d_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$
$$d_{n+1} = \gamma c_n + \delta d_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たす実数 α，β，γ，δ を求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{\textbf{5}}$ 以下，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で考える。関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ を

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$$

とし，関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2$$

とする。

(1) $h'(x) = 0$ を満たす実数 x（$0 < x < 1$）がちょうど 2 つあることを示せ。

(2) 関数 $h(x)$ の増減を調べよ。ただし (1) の 2 つの実数は a，b（$a < b$）とおくことにし，a，b，$h(a)$，$h(b)$ の具体的な値を求める必要はない。

(3) 方程式 $f_1(x) = f_2(x)$ の $0 < x < 1$ の範囲における解が $\dfrac{1}{2}$ のみであることを示せ。