$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $\vec{0}$ でない 2 つの平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直であるとする。このとき平面ベクトル $\vec{x}$ に対して，次が成立することを示せ。

$$\vec{x} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\,\vec{b}$$

(2) 自然数 n について，n の正の約数のうち n を除いたものの和が n になるとき，n は完全数であるという。例えば 6 の正の約数は 1，2，3，6 で，$1+2+3=6$ なので，6 は完全数である。自然数 k について 2^k-1 が素数であれば，$2^{k-1}(2^k-1)$ は完全数であることを示せ。

(3) 実数 x，y が $(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = 8$ を満たすとき，xy の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $c_n \neq 0$ である整式

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

に対して，

$$f^*(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$$

という整式を $f(x)$ の反転式と呼ぶことにする。また，この問題では 0 という整式は考えないことにする。

(1) 整式 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ $(c_n \neq 0)$ に対して，$f^*(x) = x^n f(\frac{1}{x})$ が成立することを証明せよ。

(2) $f(x)$ を整式とする。0 でない実数 α が方程式 $f(x)=0$ の解ならば，$\frac{1}{\alpha}$ は方程式 $f^*(x)=0$ の解であることを証明せよ。

(3) $3x^2+2x+1$ の反転式は x^2+2x+3 で，x^2+2x+3 の反転式は $3x^2+2x+1$ である。このように反転式の反転式は元の式に戻ることが多いが，そうでないこともある。反転式の反転式が元の式に戻らない例を，具体的に 1 つあげよ。

(4) $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ という 3 つの整式に $h(x)=f(x)g(x)$ という関係が成立するとき，$h^*(x) = f^*(x)g^*(x)$ となることを証明せよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 4 個のさいころを同時に 1 回投げる試行を考える。4 個のさいころの出た目の積を X とする。

(1) X が偶数である確率を求めよ。

(2) 2 または 6 の目が出たさいころの個数が 1 で，なおかつ，4 の目が出たさいころの個数が 0 である確率を求めよ。

(3) X が 4 の倍数である確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 定数 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。関数

$$y = \frac{x\sin\theta + \cos\theta}{x\cos\theta - \sin\theta}$$

のグラフを C とする。

(1) 上の関数を $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ の形で表せ。ただし，p，q，k は定数である。

(2) 曲線 C と y 軸との交点を P とする。曲線 C の，点 P における接線の方程式を求めよ。

(3) $t = \sin^2\theta$ とおく。曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を，t を用いて表せ。

$\boxed{5}$ 正の実数 x，y，z について，$\frac{1}{z}$ が $\frac{1}{x}$ と $\frac{1}{y}$ の相加平均となるとき，z を x と y の調和平均という。$a > b$ を満たす正の実数 a，b を考える。数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は次を満たしているとする。

- $a_1 = a$，$b_1 = b$
- a_{n+1} は a_n と b_n の相加平均で，b_{n+1} は a_n と b_n の調和平均である。つまり，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$$

このとき数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はどちらも a と b の相乗平均 $\sqrt{ab}$ に収束する。このことを確かめよう。

(1) $a_nb_n = ab$ となることを示せ。

(2) 次の等式を示せ。

$$a_{n+1} - \sqrt{ab} = \frac{\left(a_n - \sqrt{ab}\right)^2}{2a_n}$$

(3) 次の不等式を示せ。

$$\left|a_{n+1} - \sqrt{ab}\right| < \frac{1}{2}\left|a_n - \sqrt{ab}\right|$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{ab}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{ab}$ を示せ。