$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 次のデータは，6 人のテストの点数であり，平均値が 81 であった。このとき a の値を求め，さらに中央値を求めよ。ただし，a の値は 0 以上の整数である。

$$77 \quad 75 \quad 81 \quad 87 \quad 84 \quad a$$

(2) $(1+i)^7$ を計算せよ。ただし，i は虚数単位である。

(3) k，n は自然数で，$2k \leqq n$ を満たすとする。このとき，次の不等式を示せ。

$${}_n\mathrm{C}_{k-1} < {}_n\mathrm{C}_k$$

(4) 1 枚のコインを続けて 4 回投げる。1 回目に表が出る事象を A，4 回とも同じ面が出る事象を B とする。このとき，A と B は独立かどうか調べよ。

(5) 体積が V の三角錐 ABCD を考える。辺 AB， AC，AD，BC，CD，DB の中点をそれぞれ E，F，G，H，I，J とする。この三角錐 ABCD から 4 つの三角錐 AEFG，BEHJ，CFIH，DGJI を取り除いた立体の体積を，V を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x) = x^3 - 3x$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx$ が異なる 3 点で交わるとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ。

(2) 条件を満たす m の範囲を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = mx$ で囲まれた図形の面積 S を m を用いて表せ。

(4) (3) の面積 S が 6 となる m の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$　平面上に異なる定点B，Cと動点Aがある。3点A，B，Cが三角形ABCを作るとする。三角形ABCの内接円の半径をrとし，外接円の半径をRとする。各辺の長さを$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$とおくとき，次の各問いに答えよ。

(1) 三角形ABCの面積をSとするとき，$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$を示せ。

(2) 等式$rR=\dfrac{abc}{2(a+b+c)}$を示せ。

(3) $a=1$とする。動点Aが$b+c=2$を満たしながら動くとき，積rRの最大値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$　数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n-\log(n+1)+1$$

で定め，数列$\{b_n\}$を$b_n=e^{a_n}$と定める。ただし，eは自然対数の底であって，$e=2.71\cdots$である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $n\geqq 2$のとき，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\leqq\dfrac{e}{3}$を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$　次の各問いに答えよ。

(1) $x = \cos\theta$ とする。 $\cos 3\theta$ を x を用いて表せ。

(2) 次の等式を満たす θ をすべて求めよ。

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta + \frac{1}{2} = 0$$

ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(3) a，b，c を実数とし，3 次方程式

$$4x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

の解を α，β，γ とする。このとき a，b，c を，α，β，γ を用いて表せ。

(4) $\cos 20^\circ$，$\cos 40^\circ$，$\cos 80^\circ$ の積 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ の値を求めよ。