$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 三角形ABCにおいて辺ABを $2:3$ に内分する点をP，線分PCを $2:5$ に外分する点をQとおく。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) p, q, r を定数とする。数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1} = pa_n + qn + r$ を満たす。数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ と定めるとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3 + \left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^3$ を計算せよ。ただし，i は虚数単位である。

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} x|\sin x|dx$ を求めよ。

(5) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^4(1+x^5)^{2019}dx$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 座標平面上の放物線 $y = x^2$ 上に2つの点 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha > 0,\ \beta < 0$ とする。また，原点をOで表す。

(1) 二つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を α，β を用いて表せ。

(2) 三角形OABの面積 S を α，β を用いて表せ。

(3) 点 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$ が $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を満たしながら動くとき，面積 S の最小値とそのときの点AとBの座標を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で関数 $f(x) = x + 2\sin x$ を考える。

(1) 増減，極値を調べて増減表をかけ。

(2) さらに凹凸，変曲点を調べ，$y = f(x)$ のグラフをかけ。

(3) k を定数とする。$x\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ についての方程式 $x + 2\sin x = k$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 整数 m，n に関する方程式

$$m^2 - 2mn + 2n^2 + 2m - 8n + 9 = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える。

(1) $(*)$ の左辺を m に関する 2 次式とみて m について平方完成せよ。

(2) $(*)$ を満たす整数 m，n の組 (m, n) をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 11 の倍数

$$\cdots\cdots, \quad -11, \quad 0, \quad 11, \quad 22, \quad 33, \quad 44, \quad \cdots\cdots$$

に関連して，次の各問いに答えよ。

(1) n を自然数とし，$a_n = 10^n - (-1)^n$ とする。すべての n に対して a_n は 11 の倍数であることを示せ。

(2) N を m 桁の自然数とし，各桁を一の位から順に

$$N(1),\, N(2),\, \cdots,\, N(m)$$

と表す。$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}N(k)$ が 11 の倍数であるとき，N もまた 11 の倍数となることを示せ。

(3) 1 個のさいころを 3 回連続して投げるとき，1 回目に出た目を D_1，2 回目に出た目を D_2，3 回目に出た目を D_3 とする。一の位が D_1，十の位が D_2，百の位が D_3 である 3 桁の自然数が 11 の倍数になる確率を求めよ。