$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) x に関する方程式

$$x^2-6x-9=|5x+3|$$

の実数解をすべて求めよ。

(2) コインを 5 回投げたとき, 表が 2 回以上出て, 裏が 1 回以上出る確率を求めよ。

(3) a, b, c, d を実数とする。次の不等式を示せ。

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

(4) $(1-i)^{2018}$ を簡単にせよ。ただし i は虚数単位とする。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 三角形 ABC とその重心 G を考える。$B<C$ のとき次が成立することを示せ。ただし B, C の大きさをそれぞれ B, C で表す。

(1) $\sin B<\sin C$

(2) $\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}>\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

(4) $\mathrm{BG}>\mathrm{CG}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を自然数とし, 実数全体を定義域とする関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$$

と定める。次を証明せよ。

(1) $f_3(x)$ は単調増加である。

(2) x に関する方程式 $f_3(x)=0$ は $-2<x<-1$ の範囲に解をもつ。

(3) すべての実数 x に対して $f_4(x)>0$ である。

$\boxed{\textbf{4}}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}a_n+\dfrac{5}{2} & (a_n \geqq 0\text{ のとき})\\[2ex] -\dfrac{3}{2}a_n-\dfrac{5}{2} & (a_n<0\text{ のとき})\end{cases}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定められているとする。次の各問いに答えよ。

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ の値を求めよ。

(2) 数学的帰納法を用いて, $2^n a_n$ が奇数であることを示せ。

(3) m を自然数とする。$a_m>0$ ならば,

$$|a_{m+1}-1|=\frac{3}{2}\,|a_m-1|$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{\textbf{5}}$ n は 0 以上の整数とする。次の各問いに答えよ。

(1) 0 以上の整数 $p,\ q,\ r$ の組 (p,q,r) で $p+q+r=6$ と $p\leqq q\leqq r$ を満たすものをすべて挙げよ。

(2) 0 以上の整数 $p,\ q,\ r$ が $p+q+r=n$ と $p\leqq q\leqq r$ を満たすならば, $p\leqq\dfrac{1}{3}n$ であることを示せ。

(3) p は $0\leqq p\leqq\dfrac{1}{3}n$ を満たす整数とする。整数 $q,\ r$ の組 (q,r) で $p+q+r=n$ と $p\leqq q\leqq r$ を満たすものの総数を, $n,\ p$ を用いて表せ。$n-p$ が偶数のときと奇数のときに分けて答えよ。

(4) n が 6 の倍数で $n=6m$ と表されるとき, 0 以上の整数 $p,\ q,\ r$ の組 (p,q,r) で $p+q+r=n$ と $p\leqq q\leqq r$ を満たすものの総数を m を用いて表せ。