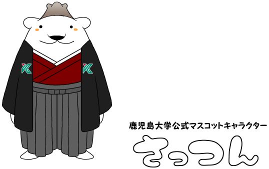
Weingarten calculus と 対称群の調和解析

松本 詔
(MATSUMOTO, SHO)

鹿児島大学 学術研究院 理工学域（理学系）



日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 函数解析学分科会
京都産業大学
平成 27 年 9 月 14 日

ランダム行列

- $N \times N$ のランダム行列 $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ が与えられたとき, 行列成分の混合モーメント
$$\mathbb{E}\left[\prod_{i,j=1}^{N} x_{ij}^{m_{ij}}\right]$$
を考える．ここで m_{ij} は非負整数, $\mathbb{E}$ は期待値.
- すなわち, 行列の集合 $\Omega \subset \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ の確率空間 $(\Omega, \textbf{Borel}, P^X)$ が与えられたときに, 積分
$$\int_\Omega \prod_{i,j=1}^{N} x_{ij}(\omega)^{m_{ij}} P^X(d\omega)$$
を計算したい．（ここでは $x_{ij} : \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ は座標関数）．

例: 2 次回転群

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathrm{SO}(2)$ は単位円 S^1 とリー群として同型.
非負整数 a, b, c, d に対し,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathrm{SO}(2)} g_{11}^a g_{12}^b g_{21}^c g_{22}^d \, \mathrm{d}g \\ =& (-1)^b \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{a+d} (\sin\theta)^{b+c} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \\ =& \begin{cases} (-1)^b \frac{(a+d-1)!! \; (b+c-1)!!}{(a+b+c+d)!!} & (a+d \text{ と } b+c \text{ がともに偶数のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases} \end{aligned}$$

例題: 3次ユニタリ群

- $\mathrm{U}(3) = \{ U = (u_{ij})_{i,j=1}^{3} \;:\; 3\text{次ユニタリ行列} \}$
- dU: $\mathrm{U}(3)$ のハール測度

例題 (Weingarten calculus の一例).

次の積分を計算せよ.

$$\int_{\mathrm{U}(3)} u_{11} u_{22} u_{33} \overline{u_{12} u_{23} u_{31}} \, dU$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

ユニタリ群

$$\mathrm{U}(N) = \{U = (u_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{C}) \mid UU^* = I_N\}.$$

一般に，コンパクトリー群 G には「両側不変性」を満たすハール確率測度 dg が一意的に存在する．

$$\int_G f(g_1 g g_2)dg = \int_G f(g)dg, \qquad \int_G dg = 1.$$

ここで，f は G 上の任意の連続関数，g_1, g_2 は G の (固定された) 任意の元．

dU を $\mathrm{U}(N)$ のハール測度とする．

$$\mathbb{E}[\underbrace{u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \cdots u_{i_n j_n}}_{n\text{ 個の積}} \underbrace{\overline{u_{i'_1 j'_1} u_{i'_2 j'_2} \cdots u_{i'_m i'_m}}}_{m\text{ 個の積}}] = \int_{\mathrm{U}(N)} [\dots\dots] dU \tag{2.1}$$

を計算しよう．（i_p, j_p, i'_p, j'_p たちは $\{1, 2, \dots, N\}$ の元.）

自明に零になる場合

命題.

$m \neq n$ のとき, $\mathbb{E}[\underbrace{u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \cdots u_{i_n j_n}}_{n \text{ 個の積}} \underbrace{\overline{u_{i'_1 j'_1} u_{i'_2 j'_2} \cdots u_{i'_m i'_m}}}_{m \text{ 個の積}}] = 0.$

イメージ
$$\int_0^{2\pi} e^{\mathtt{i} n\theta} e^{-\mathtt{i} m\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{n,m}$$

例:

$$\mathbb{E}[\underbrace{u_{11} u_{12}^2 u_{23}}_{4 \text{ 次}} \underbrace{\overline{u_{11}^2 u_{12}}}_{3 \text{ 次}}] = 0. \qquad \mathbb{E}[u_{11}^2 u_{12}^2 u_{31}] = 0.$$

ユニタリ群の Weingarten calculus

定理 2.1. [Collins (03)], [Collins–Śniady (06)]

$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n)$, $\mathbf{i}' = (i'_1, \dots, i'_n)$, $\mathbf{j}' = (j'_1, \dots, j'_n)$ に対して,

$$\mathbb{E}[u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \cdots u_{i_n j_n} \overline{u_{i'_1 j'_1} u_{i'_2 j'_2} \cdots u_{i'_n j'_n}}] = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \delta_\sigma(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \, \delta_\tau(\mathbf{j}, \mathbf{j}') \, \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma^{-1}\tau; N)$$

が成り立つ. ここで S_n は n 次対称群で,

$$\delta_\sigma(\mathbf{i}, \mathbf{i}') = \begin{cases} 1 & \text{if } (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(n)}) = (i'_1, i'_2, \dots, i'_n), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

($\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N)$ ($\sigma \in S_n$) は次スライドで説明.)

この計算手法を Weingarten calculus, 上の公式を Weingarten formula と呼ぶ. (Don Weingarten (1978) の先行研究に由来する.)

ユニタリ Weingarten 関数

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{f^\lambda}{C_\lambda(N)} \chi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in S_n). \tag{2.2}$$

- $\lambda \vdash n$: 和は n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ 全体を走る.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0, \qquad \text{各 } \lambda_i \text{ は正の整数.}$$

  自然にヤング図形と同一視する.
- χ^λ: λ に対応する S_n の既約指標.
- f^λ: λ に対応する S_n の既約表現の次元. 型 λ の標準ヤング盤の個数.
- $$C_\lambda(N) = \prod_{(i,j)\in\lambda} (N + \underbrace{j - i}_{\text{content}})$$

  と定める. 積は λ のヤング図形の箱の座標 (i, j) 全体を走る.

例: ユニタリ Weingarten 関数

ユニタリ Weingarten 関数

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) = \frac{1}{n!}\sum_{\lambda \vdash n} \frac{f^{\lambda}\chi^{\lambda}(\sigma)}{C_{\lambda}(N)} \qquad (\sigma \in S_n). \tag{2.2}$$

例. $n = 3$, $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1\ 2\ 3); N)\\
=&\frac{1}{3!}\Bigl(\underbrace{\frac{1\cdot 1}{N(N+1)(N+2)}}_{\square\square\square} + \underbrace{\frac{2\cdot(-1)}{N(N+1)(N-1)}}_{\begin{smallmatrix}\square&\square\\ \square&\end{smallmatrix}} + \underbrace{\frac{1\cdot 1}{N(N-1)(N-2)}}_{\begin{smallmatrix}\square\\ \square\\ \square\end{smallmatrix}}\Bigr)\\
=&\frac{2}{N(N^2-1)(N^2-4)}.
\end{aligned}$$

例: ユニタリ群の Weingarten calculus

例題. Weingarten calculus を使って求めてみよう!

$$\int_{\mathrm{U}(3)} u_{11} u_{22} u_{33} \overline{u_{12} u_{23} u_{31}}\, dU = ?$$

$$\mathbb{E}[u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \cdots u_{i_n j_n} \overline{u_{i'_1 j'_1} u_{i'_2 j'_2} \cdots u_{i'_n j'_n}}] = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \delta_\sigma(\mathbf{i}, \mathbf{i}')\delta_\tau(\mathbf{j}, \mathbf{j}')\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma^{-1}\tau; N).$$

データ: $N = 3$. $n = 3$. $\mathbf{i} = \mathbf{i}' = (1, 2, 3)$, $\mathbf{j} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{j}' = (2, 3, 1)$.

$\sigma = \mathrm{id}_3, \tau = (1\ 2\ 3) \in S_3$ のときのみ生き残り,

$$\int_{\mathrm{U}(3)} u_{11} u_{22} u_{33} \overline{u_{12} u_{23} u_{31}}\, dU = \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}((1\ 2\ 3); 3) = \frac{1}{60}.$$

本講演の話題

- **様々なランダム行列に関する Weingarten calculus.**
  ユニタリ群以外のコンパクトリー群, さらにコンパクト対称空間に付随するランダム行列の Weingarten calculus.

- **Weingarten 関数の性質.**
  ユニタリ群の Weingarten 関数

  $$S_n \ni \sigma \mapsto \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) \in \mathbb{Q}$$

  は, 対称群上の類関数であり, 既約指標による展開が与えられた. さらにこの関数は Jucys–Murphy 元と密接な関係があり, 組合せ論の言葉で記述することもできる. 他の種類の Weingarnten 関数も類似した性質を持つ.

準備: perfect matching

M_{2n}: $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ の perfect matchings 全体.

たとえば M_4 は

$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}, \qquad \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \qquad \{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

の 3 つの元からなる. 一般に, $|M_{2n}| = (2n-1)!!$.

M_{2n} の元 σ は,

$$\{\{\sigma(1),\sigma(2)\},\{\sigma(3),\sigma(4)\},\ldots,\{\sigma(2n-1),\sigma(2n)\}\}$$

$$\sigma(2j-1) < \sigma(2j) \ (j = 1, \ldots, n), \qquad 1 = \sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1)$$

と, 一意的に表すことができる. このとき σ は自然に S_{2n} の元と見なせる:

$$M_{2n} \subset S_{2n}.$$

準備: 超八面体群

H_n: 超八面体群. 以下で生成される S_{2n} の部分群.

$$(2i-1\ 2i)\ (i=1,2,\dots,n), \qquad (2i-1\ 2j-1)(2i\ 2j)\ (1\le i<j\le n)$$

- wreath product $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\wr S_n$ と同型.
- $|H_n| = 2^n n!$.
- 集合 M_{2n} は剰余類 S_{2n}/H_n の完全代表系:

$$S_{2n} = \bigsqcup_{\sigma\in M_{2n}} \sigma H_n.$$

- 両側剰余類 $H_n\sigma H_n$ は n の分割でパラメトライズされる. 分割 $\mu\vdash n$ に対応する両側剰余類に $\tau\in S_{2n}$ が属するとき, τ の**コセットタイプ**は μ であるという. (置換のサイクルタイプの類似.)

直交群の Weingarten calculus

実直交群 $\mathrm{O}(N) = \{R \in \mathrm{GL}(N,\mathbb{R}) \mid RR^{\mathrm{T}} = I_N\}$.

定理 3.1. [Collins–Śniady (06)], [Collins-M (09)]

$R = (r_{ij})_{1\le i,j\le N}$ を $\mathrm{O}(N)$ のハール測度に従うランダム行列とする．このとき任意の添え字の列 $\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_{2n})$, $\mathbf{j} = (j_1,\dots,j_{2n})$ に対し，

$$\mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_{2n} j_{2n}}] = \sum_{\sigma\in M_{2n}} \sum_{\tau\in M_{2n}} \Delta_\sigma(\mathbf{i})\Delta_\tau(\mathbf{j})\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma^{-1}\tau; N) \tag{3.2}$$

となる．ここで

$$\Delta_\sigma(\mathbf{i}) = \begin{cases} 1 & (\text{すべての } \{a,b\} \in \sigma \text{ に対し } i_a = i_b \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \tag{3.3}$$

である [誤植訂正]．また奇数次のモーメント $\mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_{2n+1} j_{2n+1}}]$ はいつでも 0 である．

直交 Weingarten 関数

$$(3.1) \qquad \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma; N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{f^{2\lambda}}{D_\lambda(N)} \omega^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in S_{2n}).$$

- $f^{2\lambda}$ は, $2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots)$ に対応する S_{2n} の既約表現の次元.
- $$D_\lambda(N) = \prod_{(i,j)\in\lambda} (N + 2j - i - 1)$$
  と定める.
- ω^λ は, λ に対応する (S_{2n}, H_n) の帯球関数
  $$\omega^\lambda(\sigma) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\zeta \in H_n} \chi^{2\lambda}(\sigma\zeta) \qquad (\sigma \in S_{2n},\ \lambda \vdash n).$$
- $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\cdot; N)$ は H_n-両側不変性をもつ.
  $$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\zeta\sigma\zeta'; N) = \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma; N) \qquad (\sigma \in S_{2n},\ \zeta, \zeta' \in H_n)$$

斜交群

斜交群 (シンプレクティック群)

$$\mathrm{Sp}(N) = \{S \in \mathrm{U}(2N) \mid SS^{\mathrm{D}} = I_{2N}\}.$$

ここで S^{D} は

$$S^{\mathrm{D}} = JS^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}}, \qquad J = J_N = \begin{pmatrix} O_N & I_N \\ -I_N & O_N \end{pmatrix}$$

と定める.

斜交群の Weingarten 関数 $S_{2n} \ni \sigma \mapsto \mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\sigma; N)$ は, H_n-両側 twisted という性質をもつ:

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\zeta\sigma\zeta'; N) = \mathrm{sgn}(\zeta)\mathrm{sgn}(\zeta')\mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}(\sigma; N) \qquad (\sigma \in S_{2n},\ \zeta, \zeta' \in H_n).$$

ここまでのまとめ

- 3 つの群 $\mathrm{U}(N), \mathrm{O}(N), \mathrm{Sp}(N)$ の Weingarten calculus を述べた.
- 3 つとも公式が少しずつ違う.
  和が S_n（置換）や M_{2n}（perfect matchings) を走る.
- Weingarten 関数が本質的に異なる.
  - ユニタリ: 対称群 S_n の表現論の言葉で記述される. 共役不変性をもつ.
  - 直交: 対称群 S_{2n} と超八面体群 H_n の調和解析の言葉で記述される.
    H_n-両側不変性をもつ.
  - 斜交: ほぼ直交群と同じだが, 符号の取り扱いに注意する必要がある.
    H_n-両側 twisted である.

大きなユニタリ行列

大きなランダム行列の振舞いに興味がある．Weingarten calculus で $N \to \infty$ とすることを考える．以下，$N \geq n$ とする．$\sigma \in S_n$.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{f^\lambda}{C_\lambda(N)} \chi^\lambda(\sigma) = \int_{\mathrm{U}(N)} u_{11} u_{22} \cdots u_{nn} \overline{u_{1\sigma(1)} u_{2\sigma(2)} \cdots u_{n\sigma(n)}} \, dU \tag{2.2}$$

ただちに

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) = \begin{cases} N^{-n} + \mathcal{O}(N^{-n-1}) & (\sigma = \mathrm{id}_n) \\ \mathcal{O}(N^{-n-1}) & (\sigma \neq \mathrm{id}_n) \end{cases}$$

($\sigma \in S_n$: fixed, $N \to \infty$) が分かる．$\mathcal{O}$ はランダウのラージ・オー．

Asymptotics of Wg

以下の式で係数 $a_k(\sigma)$ を定める.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k(\sigma) N^{-n-k}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\mathrm{id}_n; N) \\
&= \int_{U(N)} |u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}|^2 dU = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(f^\lambda)^2}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(N+j-i)} \\
&= \underbrace{1}_{a_0(\mathrm{id}_n)} N^{-n} - \underbrace{0}_{a_1(\mathrm{id}_n)} N^{-n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{a_2(\mathrm{id}_n)} N^{-n-2} - \underbrace{0}_{a_3(\mathrm{id}_n)} N^{-n-3} \\
&\quad + \mathcal{O}(N^{-n-4}).
\end{aligned}$$

Jucys–Murphy element

定義 (対称群の Jucys–Murphy 元).

群環 $\mathbb{C}[S_n]$ の元 $J_1, \ldots, J_n$ を,

$$
\begin{aligned}
J_1 &= 0, \\
J_2 &= (1\ 2), \\
J_3 &= (1\ 3) + (2\ 3), \\
&\cdots \\
J_n &= (1\ n) + (2\ n) + \cdots + (n-1\ n)
\end{aligned}
$$

で定める. ここで $(s\ t)$ は s と t の互換を表す.

- $J_1, \ldots, J_n$ は可換で, $\mathbb{C}[S_n]$ の極大可換部分代数を生成する.
- 近年の対称群の表現論では, 中心的な役割を果たす.

基本対称多項式 vs 完全対称多項式

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le n} x_{t_1} x_{t_2} \cdots x_{t_k}.$$

$$h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le n} x_{t_1} x_{t_2} \cdots x_{t_k}.$$

定理 [Jucys (1974)]

$$e_k(J_1, J_2, \ldots, J_n) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ (\sigma \text{ のサイクルの個数}) = n-k}} \sigma$$

命題 4.1 [Novak (10)]

$$h_k(J_1, J_2, \ldots, J_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_k(\sigma) \sigma$$

が成り立つ．ここで $a_k(\sigma)$ は (4.1) で与えられている値．

単調分解

$\sigma \in S_n$ に対し, $d(\sigma) = n - (\sigma$ のサイクルの個数$)$ とおく.

系 4.2

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k(\sigma) \left(\frac{1}{N}\right)^{n+k}$$

における係数 $a_k(\sigma)$ は, 置換 σ の長さ k の単調分解の個数である. すなわち, k 個の互換の列 $(s_1\ t_1), \dots, (s_k\ t_k)$ で次の条件を満たすものの個数が $a_k(\sigma)$ である.

$$s_i < t_i; \qquad 2 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le n; \qquad \sigma = (s_1\ t_1) \cdots (s_k\ t_k).$$

さらに,

(1) $a_k(\sigma)$ は非負整数である.

(2) $k \ge d(\sigma)$ でなければ, $a_k(\sigma) = 0$ である.

(3) $k \equiv d(\sigma) \pmod 2$ でなければ, $a_k(\sigma) = 0$ である.

例 4.1

$\sigma = \mathrm{id}_n$ を考えよう．$d(\mathrm{id}_n) = 0$．自明に $a_0(\mathrm{id}_n) = 1$．$a_2(\mathrm{id}_n)$ は，

$$s_1 < t_1, \quad s_2 < t_2, \quad 2 \le t_1 \le t_2 \le n, \quad \mathrm{id}_n = (s_1, t_1)(s_2, t_2)$$

を満たす s_1, s_2, t_1, t_2 の選び方の個数である．このとき，$s_1 = s_2$ かつ $t_1 = t_2$ でなければならない．よって，$a_2(\mathrm{id}_n) = \binom{n}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\mathrm{id}_n; N) \\
&= \int_{U(N)} |u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}|^2 dU = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(f^\lambda)^2}{\prod_{(i,j) \in \lambda} (N + j - i)} \\
&= \underbrace{1}_{a_0(\mathrm{id}_n)} N^{-n} + \underbrace{0}_{a_1(\mathrm{id}_n)} N^{-n-1} + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{a_2(\mathrm{id}_n)} N^{-n-2} + \underbrace{0}_{a_3(\mathrm{id}_n)} N^{-n-3} \\
&\quad + \underbrace{\frac{n(n-1)(3n^2+17n-34)}{24}}_{a_4(\mathrm{id}_n)} N^{-n-4} + \underbrace{0}_{a_5(\mathrm{id}_n)} N^{-n-5} + \mathcal{O}(N^{-n-6}).
\end{aligned}$$

主要項

$$(-1)^{n-l}\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma;N)$$
$$= a_{d(\sigma)}(\sigma)N^{-n-d(\sigma)} + a_{d(\sigma)+2}(\sigma)N^{-n-d(\sigma)-2} + \mathcal{O}(N^{-n-d(\sigma)-4}).$$

定理 4.3. [Collins (03), Murray (04), M–Novak (13)]

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ を $\sigma \in S_n$ のサイクルタイプとすると,

$$a_{d(\sigma)}(\sigma) = a_{n-l}(\sigma) = \prod_{j=1}^{l} \mathrm{Cat}(\mu_j - 1).$$

ここで, $\mathrm{Cat}(r) = \frac{(2r)!}{(r+1)!r!}$ はカタラン数.

[M–Novak (13)] では実際に単調分解の数え上げをおこなうことでこれを示した.

多項式性

定理 4.4 [M–Novak (13)]

$\sigma \in S_n$ に対し, $a_k(\sigma)$ は n についての多項式である.
もう少し正確に言おう. ρ を分割とする. 文字 T を変数とするある多項式 $A_k(\rho, T)$ が存在して, 次が成り立つ: $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$a_k(\sigma[n]) = A_f(\rho, n).$$

ここで $\sigma[n]$ は, サイクルタイプ $\rho \cup (1^{n-|\rho|})$ をもつ S_n の元.

例.

$$a_3\left(\text{サイクルタイプが}\,(2, 1^{n-2})\,\text{の置換}\right) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n - 8).$$

直交群の場合

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\pi; N) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k(\pi) \left(\frac{1}{N}\right)^{n+k} \qquad (\pi \in S_n),$$

$$h_k(J_1, J_2, \dots, J_n) = \sum_{\pi \in S_n} a_k(\pi)\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

直交群の場合は, ユニタリ群の場合とパラレルである. しかしもう少し複雑.

$N \geq 2n - 1$ とする.

係数 $b_k(\sigma)$ を次の式で定める.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma; N) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k(\sigma) \left(\frac{1}{N}\right)^{n+k} \qquad (\sigma \in S_{2n}).$$

Jucys–Murphy elements との関係: 直交群の場合

定理 4.5. [M (11)]

k, n は非負整数, $\sigma \in S_{2n}$. 係数 $b_k(\sigma)$ について, 次が成り立つ.

(1) [Zinn-Justin (10)] 群環 $\mathbb{C}[S_{2n}]$ の元として

$$h_k(J_1, J_3, \dots, J_{2n-1}) \sum_{\zeta \in H_n} \zeta = \sum_{\sigma \in S_{2n}} b_k(\sigma)\sigma$$

が成り立つ. (H_n は超八面体群.)

(2) $b_k(\sigma)$ は, 次を満たす互換の列 $(s_1\ t_1), \dots, (s_k\ t_k)$ の個数に等しい (単調分解の類似) :

$$s_i < t_i; \quad 3 \le t_1 \le \cdots \le t_k \le 2n-1; \quad \text{各 } t_i \text{ は奇数};$$
$$\exists \zeta \in H_n \quad \text{s.t.} \quad (s_1\ t_1)\cdots(s_k\ t_k)\zeta = \sigma.$$

定理 4.5. [M (11)]

(3) $b_k(\sigma)$ は非負整数であり, $k \geq n-l$ でなければ $b_k(\sigma)=0$. ただし, l は σ のコセットタイプの長さ.

(4) $\pi \in S_n$ のサイクルタイプと $\sigma \in S_{2n}$ のコセットタイプが一致するとき, $b_k(\sigma) \geq a_k(\pi)$. 一般には, $b_k(\sigma)$ と $a_k(\pi)$ は本質的に違うもの.

(5) [Collins–Śniady (06)] σ のコセットタイプが $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_l)$ のとき,

$$b_{n-l}(\sigma) = \prod_{j=1}^{l} \mathrm{Cat}(\mu_j - 1).$$

(6) $\sigma \in S_{2n}$ に対し $b_k(\sigma)$ は n の多項式である.

予想 [M (11)] / 証明 [Féray (12)]

[誤植訂正] $\sigma \in S_{2n}$ のコセットタイプが hook $\mu=(k+1, 1^{n-k-1})$ のとき,

$$b_{n-\ell(\mu)+1}(\sigma) = b_{k+1}(\sigma) = 4^k - \binom{2k+1}{k}.$$

- **ユニタリ群.**

$$\int_{\mathrm{U}(N)} u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \cdots u_{i_n j_n} \overline{u_{i'_1 j'_1} u_{i'_2 j'_2} \cdots u_{i'_n j'_n}}\, dU$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \delta_\sigma(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \delta_\tau(\mathbf{j}, \mathbf{j}') \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma^{-1}\tau; N).$$

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\sigma; N) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k(\sigma) \left(\frac{1}{N}\right)^{n+k}.$$

係数 $a_k(\sigma)$ の研究は, Jucys–Murphy elements を通じて組合せ論に帰着される. (単調分解, content, カタラン数, 多項式性...)

- **直交群.** ユニタリ群の場合とパラレルな議論が展開される.
- **斜交群.** 本質的に直交群の場合に帰着される.

コンパクト対称空間の Weingarten calculus

G, K: 線型 Lie 群,　　G/K: コンパクト対称空間.
$\Omega : G \to G$: K を固定点集合とする対合（カルタン対合）.
$\mathcal{S} := \{s = g_0 \Omega(g_0)^{-1} \mid g_0 \in G\}$.
推移的な作用

$$g.s = gs\Omega(g)^{-1} \qquad (g \in G,\ s \in \mathcal{S}).$$

$G/K \cong \mathcal{S}$.
この同型を通じて G/K から $\mathcal{S}$ へ確率測度 ds が導出される.

例. $\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$. $\Omega(g) = (g^{\mathrm{T}})^{-1}$.

$$\mathcal{S} = \{UU^{\mathrm{T}} \mid U \in \mathrm{U}(N)\} = \{N \times N \text{ 対称ユニタリ行列}\}.$$

$\mathrm{U}(N)$ の作用で不変な $\mathcal{S}$ 上の確率測度 ds がある．確率空間 $(\mathcal{S}, \mathbf{Borel}, ds)$ を Dyson の circular orthogonal ensemble (COE) という.

Cartan の分類

単純 Lie 群が，A, B, C, D (, E, F, G) とルート系で分類されているように，コンパクト対称空間も分類されている．

Class $\mathcal{C}$	対称空間	ランダム行列
A I A II	$\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$ $\mathrm{U}(2N)/\mathrm{Sp}(N)$	circular orthogonal ensemble (COE) circular symplectic ensemble (CSE)
A III BD I C II	$\mathrm{U}(N)/\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$ $\mathrm{O}(N)/\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ $\mathrm{Sp}(N)/\mathrm{Sp}(p) \times \mathrm{Sp}(q)$ $(N = p + q)$	chiral ensemble
D III C I	$\mathrm{O}(2N)/\mathrm{U}(N)$ $\mathrm{Sp}(N)/\mathrm{U}(N)$	Bogoliubov-de Gennes (BdG) ensemble

7 系列のコンパクト対称空間に対し，7 系列のランダム行列モデルが構成される．それぞれに Weingarten calculus が展開でき, 様々な Weingarten 関数が登場する. [M (12, 13)]

AI 型: Circular Orthogonal Ensemble

定理 (COE の Weingarten calculus). [M (12)]

対称ユニタリ行列 $V = (v_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を，コンパクト対称空間 $\mathrm{U}(N)/\mathrm{O}(N)$ に付随する行列モデル (COE) から取り出されたランダム行列とする．
$\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{2n})$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_{2m})$ に対し，

$$\mathbb{E}[v_{i_1 i_2} v_{i_3 i_4} \cdots v_{i_{2n-1} i_{2n}} \overline{v_{j_1 j_2} v_{j_3 j_4} \cdots v_{j_{2m-1} j_{2m}}}] = \delta_{nm} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \delta_\sigma(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma; N+1).$$

- 群のときは $\sum$ が 2 個．対称空間では $\sum$ が 1 個．
- 直交群の Weingarten 関数が現れ，パラメータが N ではなく $N+1$ に．
- CSE (AII 型) では斜交群の Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{Sp}}$ が現れて，パラメータが $N \mapsto N - \frac{1}{2}$.

A III 型: chiral unitary ensembles

$\mathrm{U}(N)/(\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q))$, $N = p + q$.

対応するランダム行列は,
$N \times N$ エルミートかつユニタリ, 固有値 1 (p times), -1 (q times).

A III 型の Weingarten 関数 [M (13)]

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,III}}(\sigma; p, q) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \frac{s_\lambda(\overbrace{1, \dots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{q})}{s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_{p+q=N})} \chi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in S_n).$$

- s_λ はシューア多項式で,
  $s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_{N}) = \frac{f^\lambda}{n!} C_\lambda(N) = \frac{f^\lambda}{n!} \prod_{(i,j) \in \lambda} (N + j - i)$.
- 例. $\mathrm{Wg}^{\mathrm{A\,III}}((1)(2); p, q) = \frac{(p-q+1)(p-q-1)}{(p+q+1)(p+q-1)}$.

D III 型: Bogoliubov-de Gennes (BdG) ensemble

$\mathrm{O}(2N)/\mathrm{U}(N)$.

D III 型の Weingarten 関数 [M (13, 15)]

- 左 H_n-twisted, 右 H_n-不変の性質を持つ!

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\zeta\sigma\zeta'; N) = \mathrm{sgn}(\zeta)\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma; N) \qquad (\sigma \in S_{2n},\ \zeta, \zeta' \in H_n).$$

- [Ivanov (97)] や [Okounkov–Olshanski (96)] による Bispherical function の理論を用いる.
- $\sigma \in S_{4m}$ のコセットタイプが, 2ν (ν は m の分割) という形をしているときだけ生き残り, そのときの値は

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{D\,III}}(\sigma; N) = \pm \frac{1}{2^{2m-\ell(\nu)}} \mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}\left(\nu; N - \frac{1}{2}\right)$$

となる [誤植訂正]. ここで, $\mathrm{Wg}^{\mathrm{U}}(\nu; N - \frac{1}{2})$ はユニタリ Weingarten 関数のサイクルタイプ ν となる置換での値である.

この章のまとめ

7 系列の古典的なコンパクト対称空間に付随するランダム行列の Weingarten calculus を確立した．対応する Weingarten 関数は以下の性質をもつ．

- A I 直交 Wg に一致．しかしパラメータは $N+1$．両側 H_n-不変．
- A II 斜交 Wg に一致．しかしパラメータは $N-\frac{1}{2}$．両側 H_n-twsited.
- AIII 2 つのパラメータ p,q を持つ．共役不変．
- BD I 2 つのパラメータ p,q を持つ．両側 H_n-不変．
- C II 2 つのパラメータ p,q を持つ．両側 H_n-twsited.
- D III 特殊値はユニタリ Wg に一致．しかしパラメータは $N-\frac{1}{2}$．左 H_n-twisted, 右 H_n-不変．
- C I 特殊値はユニタリ Wg に一致．しかしパラメータは $N+\frac{1}{2}$．左 H_n-不変, 右 H_n-twisted.

- U 共役不変．
- O 両側 H_n-不変．
- Sp 両側 H_n-twsited.

その他の Weingarten calculus

- $\mathrm{SU}(N) = \{U \in \mathrm{U}(N) \mid \det(U) = 1\}$ の Weingarten calculus (未完成).

$$k \text{ が } N \text{ の倍数でなければ} \qquad \int_{\mathrm{SU}(N)} u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_k j_k} \, dU = 0.$$

- 例外型コンパクト群 G_2 の Weingarten calculus (未完成). G_2 は八元数体の自己同型群で, SO(7) の部分群.

$$\int_{G_2} g_{12}^2 g_{17}^2 \, dg = \frac{1}{63}.$$

- ウィッシャート行列の逆行列の Weingarten calculus ([Graczyk–Letac–Massam (03, 05), M (12), Collins–M–Saad (14)])

その他の Weingarten calculus

- ユニタリ群上のブラウン運動とは,

$$\text{(SDE)} \qquad dU_N(t) = U_N(t)dK_N(t) - \frac{1}{2}U_N(t)dt, \qquad U_N(0) = I_N$$

の強い解 $U_N(t)$ のことである．ここで $K_N(t)$ は, リー環 $\mathfrak{u}(N) \cong \mathbb{R}^{N^2}$ 上のブラウン運動. $U_N(t)$ は, カシミール元（の $\frac{1}{2}$ 倍）を無限小生成作用素とするマルコフ過程である.
[Dahlqvist (arXiv 2012)] は, $U_N(t)$ の行列成分に関する Weingarten calculus を与えた.

Weingarten calculus の応用

Weingarten calculus (since 2003) はランダム行列理論において基本的な道具の一つとなりつつある．特に，Weyl の積分公式が通用しない場合や，$N \to \infty$ での挙動を見る際に強い力を発揮する．既に多くの分野で Weingarten calculus が用いられている:

- Harish-Chandra–Itzykson–Zuber 積分の漸近挙動 [Goulden–Guay-Paquet–Novak (14)]
- ランダム解析関数 [Krishnapur (09)]
- デザインとコード [Scott (08)]
- 量子情報 [Montanaro (13)]
- 共形場理論 [Diaz (14)]