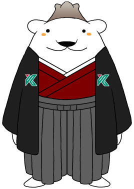
ランダム行列の行列成分と組合せ論

松本 詔 (MATSUMOTO, Sho)

鹿児島大学院理工学研究科



2014 年 4 月 23 日

正規分布

$\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^{n}$ を n 次の正定値実対称行列とし, 共分散行列 Σ をもつ n 次元正規分布を考える. $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \sim \mathrm{N}_{\mathbb{R}}(\mathbf{0}, \Sigma)$.

$(X_1, \ldots, X_n)$ の同時密度関数は

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{x}, \Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\rangle_{\mathbb{R}^n}\right)$$

で与えられる. 共分散は $\mathbb{E}[X_i X_j] = \sigma_{ij}$.

問い.

$i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が与えられているとする.
モーメント $\mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}]$ を計算せよ.

ペアリング (pairings, perfect matchings)

$\mathcal{M}_{2k}$: $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ の 2 点集合（ペア）への分け方全体.

$\mathcal{M}_4$ は次の 3 つからなる.

$$\{1,2\} \sqcup \{3,4\}, \qquad \{1,3\} \sqcup \{2,4\}, \qquad \{1,4\} \sqcup \{2,3\}.$$

$\mathcal{M}_6$ の要素として例えば,

$$\{1,3\} \sqcup \{2,4\} \sqcup \{5,6\}, \quad \{1,6\} \sqcup \{3,5\} \sqcup \{2,4\}, \quad \ldots$$

一般に，$|\mathcal{M}_{2k}| = (2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1.$

Wick の公式

k が奇数のとき，$\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_k}]=0$.

$\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{2k}}]$ を考える.

Wick の公式

$Y_1=X_{i_1}, Y_2=X_{i_2},\ldots,Y_{2k}=X_{i_{2k}}$ とおく．このとき,

$$\mathbb{E}[Y_1Y_2\cdots Y_{2k}]=\sum_{p\in\mathcal{M}_{2k}}\prod_{\{a,b\}\in p}\mathbb{E}[Y_aY_b].$$

例えば,

$$\mathbb{E}[Y_1Y_2Y_3Y_4]=\mathbb{E}[Y_1Y_2]\mathbb{E}[Y_3Y_4]+\mathbb{E}[Y_1Y_3]\mathbb{E}[Y_2Y_4]+\mathbb{E}[Y_1Y_4]\mathbb{E}[Y_2Y_3].$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1^2X_3X_4]&=\mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[X_3X_4]+\mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_1X_4]+\mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_1X_3]\\&=\sigma_{11}^2\sigma_{34}+2\sigma_{13}\sigma_{14}.\end{aligned}$$

ランダム行列

$\mathcal{X} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ を行列の集合，dX を $\mathcal{X}$ 上の確率測度とし，確率空間 $(\mathcal{X}, \textbf{Borel}, dX)$ を考える．

n^2 個の変数を持つ多項式 $P(X) = P((x_{ij})_{i,j=1}^n)$ または $2n^2$ 個の変数を持つ多項式 $Q(X, \overline{X}) = Q((x_{ij}, \overline{x_{ij}})_{i,j=1}^n)$ に対し，$\mathbb{E}[P(X)]$ または $\mathbb{E}[Q(X, \overline{X})]$ を計算したい．もっと素朴に，単項式の積分を計算したい．

問い．

$$\mathbb{E}[x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_k j_k}] \quad \text{または} \quad \mathbb{E}[x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_k j_k} \overline{x_{i'_1 j'_1} x_{i'_2 j'_2} \cdots x_{i'_l i'_l}}]$$

を計算せよ．ここで x_{ij} は行列 $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{X}$ の行列要素で，$i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k, i'_1, \ldots, i'_l, j'_1, \ldots, j'_l$ は $\{1, 2, \ldots, n\}$ に属す．

例: 2次回転群

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ U = (u_{ij})_{1\le i,j\le 2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

SO(2) は S^1 とリー群として同型.
非負整数 a, b, c, d に対し,

$$\int_{\mathrm{SO}(2)} u_{11}^a u_{12}^b u_{21}^c u_{22}^d \,\mathrm{d}U$$

$$=(-1)^b \int_0^{2\pi} \cos^{a+d}\theta \sin^{b+c}\theta \, \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$$

$$= \begin{cases} (-1)^b \frac{(a+d-1)!!\ (b+c-1)!!}{(a+b+c+d)!!} & a+d \text{ と } b+c \text{ がともに偶数のとき}, \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases}$$

ユニタリ群

$\mathrm{U}(n) = \{U = (u_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid UU^* = I_n\}$.

一般に，コンパクト Lie 群 G には次の「両側不変性」を満たす Haar 確率測度 dg が一意的に存在する．

$$\int_G f(g_1 g g_2) dg = \int_G f(g) dg.$$

ここで，f は G 上の任意の可積分関数, g_1, g_2 は G の (固定された) 任意の元.
dU を $\mathrm{U}(n)$ の Haar 測度とする.

$$\mathbb{E}[u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \cdots u_{i_k j_k} \overline{u_{i'_1 j'_1} u_{i'_2 j'_2} \cdots u_{i'_l i'_l}}] = \int_{\mathrm{U}(n)} [\ldots\ldots] dU$$

を計算しよう．

ユニタリ群上の積分

命題.

$k \neq l$ のとき，$\mathbb{E}[u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_kj_k}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_lj'_l}}] = 0.$

Proof: Haar 測度の両側不変性から，U と $e^{\mathrm{i}\theta}U$ の分布は同じである．よって，

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_kj_k}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_lj'_l}}]\\&= e^{\mathrm{i}(k-l)\theta}\mathbb{E}[u_{i_1j_1}u_{i_2j_2}\cdots u_{i_kj_k}\overline{u_{i'_1j'_1}u_{i'_2j'_2}\cdots u_{i'_lj'_l}}].\end{aligned}$$

$\theta \in \mathbb{R}$ は任意に取れるので，結論を得る．$\square$

例:

$$\mathbb{E}[u_{11}u_{12}^2u_{23}\overline{u_{11}^2u_{12}}] = 0. \qquad \mathbb{E}[u_{11}^2u_{12}^2u_{31}] = 0.$$

ユニタリ群上の Weingarten calculus

定理. [Samuel (1980)], [Collins (2003)]

$\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_k)$, $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_k)$, $\boldsymbol{i}' = (i'_1, \ldots, i'_k)$, $\boldsymbol{j} = (j'_1, \ldots, j'_k)$.

$$\mathbb{E}[u_{i_1 j_1} u_{i_2 j_2} \cdots u_{i_k j_k} \overline{u_{i'_1 j'_1} u_{i'_2 j'_2} \cdots u_{i'_k j'_k}}] = \sum_{\sigma \in S_k} \sum_{\tau \in S_k} \delta_\sigma(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}') \delta_\tau(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}') \mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}(\sigma^{-1}\tau).$$

ここで S_k は k 次対称群で,

$$\delta_\sigma(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}') = \begin{cases} 1 & \text{if } (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \ldots, i_{\sigma(k)}) = (i'_1, i'_2, \ldots, i'_k), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この計算手法を Weingarten calculus，上の公式を Weingarten formula と呼ぶ．(Don Weingarten (1978) の先行研究に由来する．)

例

$$\mathbb{E}[|u_{12}u_{21}|^2] = \mathbb{E}[u_{12}u_{21}\overline{u_{12}u_{21}}] \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}' = (1,2),\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}' = (2,1)$$

$$= \mathrm{Wg}_2^{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{id}) = \frac{1}{n^2-1}.$$

$$\mathbb{E}[|u_{12}|^3] = \mathbb{E}[u_{12}u_{12}u_{12}\overline{u_{12}u_{12}u_{12}}] \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}' = (1,1,1),\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}' = (2,2,2)$$

$$= \sum_{\sigma\in S_3}\sum_{\tau\in S_3} \mathrm{Wg}_3^{\mathrm{U}(n)}(\sigma^{-1}\tau) = 3!\sum_{\rho\in S_3}\mathrm{Wg}_3^{\mathrm{U}(n)}(\rho) = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\mathbb{E}[u_{11}u_{22}u_{33}\overline{u_{11}u_{12}u_{33}}] = 0.$$

($\boldsymbol{i} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{i}' = (1,1,3)$ であり，$\delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}') = 1$ となるような $\sigma \in S_3$ は存在しないから.)

ユニタリ Weingarten 関数

$L(S_k)$ を S_k 上の関数全体のなす代数とする．積 $*$ は

$$(f_1 * f_2)(\sigma) = \sum_{\tau \in S_k} f_1(\tau) f_2(\tau^{-1}\sigma) \qquad (\sigma \in S_k)$$

で定義する．
また，$T_k^{\mathrm{U}(n)} \in L(S_k)$ を

$$T_k^{\mathrm{U}(n)}(\sigma) = n^{(\sigma \text{ のサイクルの個数})} \qquad (\sigma \in S_k)$$

と定義する．

ユニタリ Weingarten 関数

$L(S_k)$ における，$T_k^{\mathrm{U}(n)}$ の（擬似）逆元を $\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}$ と定義する．
すなわち，$T_k^{\mathrm{U}(n)} * \mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)} = \delta_{\mathrm{id}}$.
（または $T_k^{\mathrm{U}(n)} * \mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)} * T_k^{\mathrm{U}(n)} = T_k^{\mathrm{U}(n)}$.)

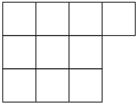
ユニタリ Weingarten 関数

命題. [Collins (2003)]

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \ell(\lambda) \le n}} \frac{f^\lambda}{\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(n+j-i)} \chi^\lambda.$$

ここで和は，長さ $\ell(\lambda)$ が n 以下の，k の分割 λ 全体を走る．また，
$Y(\lambda)$: λ のヤング図形，
χ^λ: λ に対応する S_k の既約指標，
f^λ: λ に対応する既約表現の次元.

$$\lambda = (4,3,3) \vdash 10, \quad \ell(\lambda) = 3, \quad f^\lambda = 210, \quad Y(\lambda) =$$



,

$$\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(n+j-i) = n^3(n+1)^2(n+2)(n+3)(n-1)^2(n-2).$$

大きなユニタリ行列

大きなユニタリ行列の振舞い，すなわち行列積分の $n \to \infty$ における振舞いに興味がある．そのために，ユニタリ Weingarten 関数の $n \to \infty$ の挙動について調べる．$n \geq k$ のとき，

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}(\sigma) = \frac{1}{k!} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{f^\lambda}{\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(n+j-i)} \chi^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma \in S_k).$$

ただちに，

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}(\sigma) = \mathcal{O}(n^{-k}) \qquad (\sigma \in S_k \text{ fixed}, \quad n \to \infty)$$

が分かる．

漸近挙動

$\sigma \in S_k$ のサイクルの個数を $\ell(\sigma)$ と書く.

定理. [M-Novak (2013)]

$n \geq k$ とするとき，ユニタリ Weingarten 関数は次のように展開される.

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}(\sigma) = (-1)^{k-\ell(\sigma)} \sum_{\substack{r: r \geq k-\ell(\sigma) \\ r \equiv k-\ell(\sigma) \pmod 2}} a_r(\sigma) n^{-k-r}.$$

ここで，係数 $a_r(\sigma)$ は次の条件を満たす列 $s_1, s_2, \dots, s_r, t_1, t_2, \dots, t_r$ の個数である．特に，$a_r(\sigma)$ は非負整数である.

1. 全ての i について $s_i < t_i$ で，これらは正の整数;
2. $2 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r \leq k$;
3. 互換の積 $(s_1, t_1) \cdots (s_r, t_r)$ は σ に一致する.

例

$\sigma = \mathrm{id}_k$ を考えよう. 自明に $a_0(\mathrm{id}_k) = 1$. $a_2(\mathrm{id}_k)$ は,

$$s_1 < t_1, \quad s_2 < t_2, \quad 2 \le t_1 \le t_2 \le k, \quad \mathrm{id}_k = (s_1, t_1)(s_2, t_2)$$

を満たす s_1, s_2, t_1, t_2 の選び方の個数である. このとき, $s_1 = s_2$ かつ $t_1 = t_2$ でなければならない. よって, $a_2(\mathrm{id}_k) = \binom{k}{2}$.

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{id}_k) = \int_{U(n)} |u_{11}u_{22}\cdots u_{kk}|^2 dU$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\lambda \vdash k} \frac{(f^\lambda)^2}{\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(n+j-i)}$$

$$= n^{-k} + \binom{k}{2} n^{-k-2} + \frac{k(k-1)(3k^2+17k-34)}{24} n^{-k-4} + \mathcal{O}(n^{-k-6}).$$

主要項

定理. [M-Novak (2013)]

$\mu_1, \ldots, \mu_l$ ($l = \ell(\sigma)$) を σ の各サイクルの長さとすると,

$$a_{k-\ell(\sigma)}(\sigma) = \prod_{j=1}^{l} \mathrm{Cat}(\mu_j - 1).$$

すなわち,

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}(\sigma) = n^{-2k+l} \left(\prod_{j=1}^{l} \mathrm{Cat}(\mu_j - 1) + \mathcal{O}(n^{-2}) \right).$$

ここで, $\mathrm{Cat}(r) = \frac{(2r)!}{(r+1)!r!}$ は Catalan 数.

直交群

$\mathrm{O}(n) = \{R \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid RR^{\mathrm{T}} = I_n\}$.　dR: $\mathrm{O}(n)$ の Haar 測度.

$\mathcal{M}_{2k}$ を思い出そう．$\mathcal{M}_6$ の要素として例えば,

$$\{1,3\} \sqcup \{2,4\} \sqcup \{5,6\}, \quad \{1,6\} \sqcup \{2,5\} \sqcup \{3,4\}, \quad \dots$$

$\mathcal{M}_{2k}$ は S_{2k} の部分集合と見なすことができる:

$$\mathcal{M}_{2k} \ni \mathfrak{p} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2k-1 & 2k \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(2k-1) & p(2k) \end{pmatrix} \in S_{2k}.$$

ただし $p(1), \dots, p(2k)$ は,
$\mathfrak{p} = \{p(1) < p(2)\} \sqcup \{p(3) < p(4)\} \sqcup \cdots \sqcup \{p(2k-1) < p(2k)\}$ かつ $p(1) < p(3) < \cdots < p(2k-1)$ で一意的に決める.

直交群上の Weingarten calculus

命題.

k が奇数ならば $\mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_k j_k}] = 0$.

定理. [Collins-Śniady (2006)]

$R = (r_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{O}(n)$. $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_{2k})$, $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_{2k})$ とおく.

$$\mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_{2k} j_{2k}}] = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2k}} \sum_{\mathfrak{q} \in \mathcal{M}_{2k}} \Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i}) \Delta_{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{j}) \mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n)}(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{q}).$$

ここで，$\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i})$ は次の条件を満たすとき 1，それ以外では 0 をとる:

$$\mathfrak{p} \text{ のすべてのペア } \{a, b\} \text{ に対し，} i_a = i_b.$$

$\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{q}$ は S_{2k} の元と見なしており，$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n)}$ は S_{2k} 上の関数.

例

$\mathbb{E}[r_{11}r_{12}r_{21}r_{22}]$ を考えよう. $\boldsymbol{i} = (1, 1, 2, 2)$ かつ $\boldsymbol{j} = (1, 2, 1, 2)$.
$\Delta_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{i}) = 1$ そして $\Delta_{\mathfrak{q}}(\boldsymbol{j}) = 1$ ならば, $\mathfrak{p}$ と $\mathfrak{q}$ はそれぞれ

,

でなければならない.
すなわち, $\mathfrak{p} = \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\}$, $\mathfrak{q} = \{1, 3\} \sqcup \{2, 4\}$.

よって,

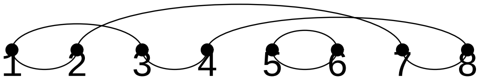
$$\mathbb{E}[r_{11}r_{12}r_{21}r_{22}] = \mathrm{Wg}_2^{\mathrm{O}(n)}(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{q}) = \frac{-1}{n(n-1)(n+2)}.$$

直交 Weingarten 関数

置換 $\sigma \in S_{2k}$ に対し，無向グラフ $\Gamma(\sigma)$ を次で定義する．
頂点集合 $\{1, 2, \dots, 2k\}$;
辺 $\{\sigma(2i-1), \sigma(2i)\}, \{2i-1, 2i\} \quad i = 1, 2, \dots, k$.

$\Gamma(\sigma)$ の連結成分の個数を $\kappa(\sigma)$ と書く．

例. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 2 & 7 & 4 & 8 \end{smallmatrix}\right) \in S_8$. このとき，$\kappa(\sigma) = 2$.



H_k を，次で生成される S_{2k} の部分群とする．

$$(2r-1, 2r) \quad (r = 1, 2, \dots, k),$$
$$(2i-1, 2j-1)(2i, 2j) \quad (1 \le i < j \le k).$$

$H_k \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k \rtimes S_k$ を超八面体群または BC 型 Weyl 群という．

直交 Weingarten 関数

埋め込み $\mathcal{M}_{2k} \subset S_{2k}$ の下で，$\mathcal{M}_{2k}$ は S_{2k}/H_k の完全代表系をなす．

$$L(S_{2k}, H_k) := \{f \in L(S_{2k}) \mid f(\zeta\sigma\zeta') = f(\sigma)\ (\sigma \in S_{2k},\ \zeta, \zeta' \in H_k)\}.$$

すなわち，$f \in L(S_{2k}, H_k)$ は両側剰余類 $H_k \sigma H_k$ $(\sigma \in S_{2k})$ 上で定数である．
積として

$$(f_1 \star f_2)(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{M}_{2k}} f_1(\tau) f_2(\tau^{-1}\sigma) = (2^k k!)^{-1} (f_1 * f_2)(\sigma)$$

を考えると，

$$p_k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{for } \sigma \in H_k \\ 0 & \text{for } \sigma \in S_{2k} \setminus H_k \end{cases}$$

を単位元とする可換代数となる．

直交 Weingarten 関数

S_{2k} 上の関数 $T_k^{\mathrm{O}(n)}$ を

$$T_k^{\mathrm{O}(n)}(\sigma) = n^{\kappa(\sigma)}$$

で定義する.

定義（直交 Weingarten 関数）.

$L(S_{2k}, H_k)$ における，$T_k^{\mathrm{O}(n)}$ の（擬似）逆元を $\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n)}$ と定義する.
すなわち，$T_k^{\mathrm{O}(n)} \star \mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n)} = p_k$.
（または $T_k^{\mathrm{O}(n)} \star \mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n)} \star T_k^{\mathrm{O}(n)} = T_k^{\mathrm{O}(n)}$.）

直交 Weingarten 関数

ユニタリ Weingarten 関数は，対称群の表現論（特に既約指標）を用いて表すことができた．一方...

定理．[Collins-M (2009)]

次の表示を持つ．$2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots)$ と書く．

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n)} = \frac{1}{(2k-1)!!} \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \ell(\lambda) \le n}} \frac{f^{2\lambda}}{\prod_{(i,j)\in Y(\lambda)}(n+2j-i-1)} \omega^{\lambda}.$$

ここで，ω^λ はゲルファント対 (S_{2k}, H_k) の帯球関数であり，次で定義される．

$$\omega^\lambda(\sigma) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\zeta \in H_k} \chi^{2\lambda}(\sigma\zeta).$$

Note: $\{\omega^\lambda\}_{\lambda \vdash k}$ は $L(S_{2k}, H_k)$ の基底をなす．

漸近挙動

直交 Weingarten 関数を n^{-1} で展開しよう.

定理. [M (2011)]

$n \geq 2k-1$ のとき, $\sigma \in S_{2k}$ に対して

$$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n)}(\sigma) = \sum_{r \geq k-\kappa(\sigma)} (-1)^r b_r(\sigma) n^{-k-r}.$$

ここで, 係数 $b_r(\sigma)$ は次を満たす列 $s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_r$ の個数である. 特に, $b_r(\sigma)$ は非負整数である.

1. 全ての i について $s_i < t_i$ で, これらは正の整数;
2. $3 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r \leq 2k-1$ でこれらは奇数;
3. 互換の積 $(s_1, t_1) \cdots (s_r, t_r)$ を ρ とすると, $\sigma^{-1}\rho \in H_k$.

主要項

定理. [M (2011)]

$2\mu_1, \ldots, 2\mu_l$ ($l = \kappa(\sigma)$) をグラフ $\Gamma(\sigma)$ の各連結成分が含む頂点の個数とすると,

$$b_{k-\kappa(\sigma)}(\sigma) = \prod_{j=1}^{l} \mathrm{Cat}(\mu_j - 1).$$

予想. [M (2011)] / 証明. [Féray (2012)]

$\sigma \in S_{2k}$ が $\kappa(\sigma) = 1$ を満たすとき,

$$b_{k-\kappa(\sigma)+1}(\sigma) = b_k(\sigma) = 4^k - \binom{2k+1}{k}.$$

[Féray (2012)] は任意の $\sigma \in S_{2k}$ に対して $b_{k-\kappa(\sigma)+1}(\sigma)$ の別の組合せ論的意味付けを与えている.

ここまでのまとめ

1. ユニタリ群 $U(n)$ の Haar 測度に従うランダム行列 $U = (u_{ij})$ に対し，$\mathbb{E}[u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_k j_k} \overline{u_{i'_1 j'_1} \cdots u_{i'_k j'_k}}]$ を計算する手法を与えた．直交群 $\mathrm{O}(n)$ やシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(n)$ に対しても類似の公式がある．
2. ユニタリ Weingarten 関数は，対称群の既約指標を用いて表すことができる．直交群とシンプレクティック群の場合は，(twisted) ゲルファント対の帯球関数を用いて表すことができる．
3. $\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{U}(n)}(\sigma) = \pm \sum_{r=0}^{\infty} a_r(\sigma) n^{-r-k}$ と展開したときに，$a_r(\sigma)$ を置換の分解の仕方の数え上げとして表した．特に最初の係数 $a_{k-\ell(\sigma)}(\sigma)$ は Catalan 数の積で書けることを組合せ論的に示した．直交群とシンプレクティック群の場合も，類似の表示が得られた．

コンパクト対称空間の Weingarten calculus

G, K を線型 Lie 群で，G/K がコンパクト対称空間であると仮定する．$\Omega : G \to G$ を K を固定点集合とする対合とする．このとき，G の部分集合 $\mathcal{S} := \{V = g\Omega(g^{-1}) \mid g \in G\}$ には，G が

$$g_0.V = g_0 V \Omega(g_0)^{-1} \qquad (g_0 \in G, \ V \in \mathcal{S})$$

で推移的に作用し，G/K と $\mathcal{S}$ は（G の作用も込みで）微分多様体として同型になる．また，G/K には G の作用で不変な確率測度が一意的に存在するが，この同型を通じて $\mathcal{S}$ に確率測度 dV が導出される．

例. $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$. $\Omega(g) = (g^{\mathrm{T}})^{-1}$.

$$\mathcal{S} = \{UU^{\mathrm{T}} \mid U \in \mathrm{U}(n)\} = \{n \times n \text{ 対称ユニタリ行列}\}.$$

$\mathrm{U}(n)$ の作用で不変な $\mathcal{S}$ 上の確率測度 dV がある．確率空間 $(\mathcal{S}, \mathbf{Borel}, dV)$ を Dyson の circular orthogonal ensemble (COE) という．

Cartan の分類

単純 Lie 群が，A, B, C, D (, E, F, G) とルート系で分類されているように，コンパクト対称空間も分類されている．

Class $\mathcal{C}$	対称空間	ランダム行列
A I	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$	circular orthogonal ensemble (COE)
A II	$\mathrm{U}(2n)/\mathrm{Sp}(n)$	circular symplectic ensemble (CSE)
A III	$\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(a)\times\mathrm{U}(b)$	
BD I	$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(a)\times\mathrm{O}(b)$	chiral ensemble
C II	$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(a)\times\mathrm{Sp}(b)$	
	$(n=a+b)$	
D III	$\mathrm{O}(2n)/\mathrm{U}(n)$	Bogoliubov-de Gennes (BdG) ensemble
C I	$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{U}(n)$	

7 種類のコンパクト対称空間に対し，先述の通りランダム行列モデルが構成される．それぞれに対し，Weingarten calculus がある．[M (2012, 2013)]

Circular Orthogonal Ensemble

対称ユニタリ行列 $V=(v_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を，コンパクト対称空間 $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ に付随する行列モデル (COE) から取り出されたランダム行列とする．

定理.[M (2012)]

$\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,\dots,i_{2k})$, $\boldsymbol{j}=(j_1,j_2,\dots,j_{2l})$.

$$\mathbb{E}\left[v_{i_1i_2}v_{i_3i_4}\cdots v_{i_{2k-1}i_{2k}}\overline{v_{j_1j_2}v_{j_3j_4}\cdots v_{j_{2l-1}j_{2l}}}\right] = \delta_{kl}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\delta_\sigma(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n+1)}(\sigma).$$

$\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(n+1)}$ が登場したのは驚くべきことである．CSE の場合は，シンプレクティック Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{Sp}(n)}$ の n を $n-\frac{1}{2}$ に置き換えたものが登場する．残り 5 種類の行列モデルに対しては，新しい Weingarten 関数がそれぞれ登場する．

Circular Orthogonal Ensemble

系.

$$\mathbb{E}[|v_{ii}|^{2k}] = \frac{2^k k!}{(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)},$$
$$\mathbb{E}[|v_{ij}|^{2k}] = \frac{k!}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-2)(n+2k-1)} \quad (i \neq j).$$

実Wishart行列の逆行列

Σ を n 次正定値実対称行列とし，$\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_p$ を独立同分布なランダム列ベクトルで，それぞれ正規分布 $\mathrm{N}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{0}, \Sigma)$ に従うとする．このとき $n \times n$ ランダム行列

$$W = \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{X}_p \boldsymbol{X}_p^{\mathrm{T}}$$

を実Wishart行列という．

定理. [M (2012)]

$q = p - n - 1$ とおく．W, Σ の逆行列をそれぞれ $W^{-1} = (w^{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $\Sigma^{-1} = (\sigma^{ij})_{1 \le i,j \le n}$ とかく．$2k - 1 \le q$ のとき，

$$\mathbb{E}[w^{i_1 i_2} w^{i_3 i_4} \cdots w^{i_{2k-1} i_{2k}}] = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2k}} [\mathrm{Wg}_k^{\mathrm{O}(N)}(\mathfrak{p})]_{N=-q} \prod_{\{a,b\} \in \mathfrak{p}} \sigma^{i_a i_b}.$$

この結果は，複合Wishart行列へと拡張されている．
[Collins-M-Saad (2014)].

Weingarten calculusの今後

Weyl の積分公式: f が U(n) 上の類関数（すなわち $f(hgh^{-1}) = f(g)$ for $g, h \in G$) ならば,

$$\int_{U(n)} f(U)dU = \frac{1}{n!} \int_{[0,2\pi]^{\times n}} f(\mathrm{diag}(e^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\theta_n})) \prod_{1 \le i < j \le n} |e^{\mathrm{i}\theta_i} - e^{\mathrm{i}\theta_j}|^2 \prod_{j=1}^{n} \frac{d\theta_j}{2\pi}.$$

Weingarten calculus (since 2003) はランダム行列理論において基本的な道具となりつつある．特に，Weyl の積分公式が通用しない場合や，$n \to \infty$ での挙動を見る際に強力な力を発揮する．既に多くの分野で Weingarten calculus が用いられている:

（自由）確率論，漸近的表現論, 量子情報理論,
統計（多変量解析，数理ファイナンス）, ランダム解析関数,
代数的組合せ論（デザイン），物理（共形場理論）.