ガウス型べき級数の実零点過程の相関関数とパフィアン

松本 詔 (名古屋大・多元数理) ,　　　白井朋之（九州大 IMI）

ランダム解析関数の零点分布はこれまでに多くの研究がある（例えば [3] を参照）．Kac [1] は実係数ランダム多項式 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ($\{a_k\}_{k=0}^{n}$ は i.i.d. な実標準正規分布をもつ確率変数列) の実零点過程の 1 点相関関数や，実零点の個数の期待値の，$n \to \infty$ における漸近挙動に関する結果を得た．また Peres-Virág [2] は，複素係数ランダム級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k z^k$ ($\{\zeta_k\}_{k=0}^{\infty}$ は i.i.d. な複素標準正規分布をもつ確率変数列) の零点が，Bergman 核に付随する複素単位円板上の行列式点過程を定めることを示した．

ここでは上の 2 つの場合に関連して，実確率変数を係数とするランダム級数

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

($\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ は i.i.d. な実標準正規分布をもつ確率変数列) を扱う．簡単な Borel-Cantelli の議論により，a.s. で $f(t)$ の収束半径は 1 となる．また開区間 $I = (-1, +1)$ において，$\{f(t)\}_{t \in I}$ は共分散 $E[f(s)f(t)] = \frac{1}{1-st}$ をもつガウス過程となる．f の係数は実数なので，複素関数としては実零点を持つ．このため $\mathbb{C}$ 上の零点過程としての相関測度は $\mathbb{C}$ 上のルベーグ測度に関して特異な成分をもつ．このことが [2] などに比べて問題の扱いを難しくしている．そこで，ここでは実零点に制限して考える．

次の定理 1 は，f の実零点過程がパフィアン点過程となることを述べている．パフィアンの定義を思い出そう．$2n \times 2n$ の交代行列 $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le 2n}$ に対して，B のパフィアン $\operatorname{Pf} B$ は

$$\operatorname{Pf} B = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) b_{\sigma(1)\sigma(2)} b_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots b_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

で定まる．ここで σ は $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ かつ $\sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1)$ を満たすような $1, 2, \ldots, 2n$ の置換全体を走り，$\epsilon(\sigma)$ は置換 σ の符号である．

定理 1. f の実零点過程のルベーグ測度に関する n 点相関関数 $\rho_n(t_1, \ldots, t_n)$ は，次のようにパフィアンで与えられる．$t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ に対し，

$$\rho_n(t_1, \ldots, t_n) = \pi^{-n} \operatorname{Pf}(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

ここで各 $\mathbb{K}(s,t)$ $(s, t \in I)$ は 2×2 の行列で，$\operatorname{Pf}(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}$ は $2n \times 2n$ 交代行列 $(\mathbb{K}(t_i, t_j))_{1 \le i,j \le n}$ のパフィアンである．また，$\mathbb{K}(s,t)$ は以下で与えられる．

$$\mathbb{K}(s,t) = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11}(s,t) & \mathbb{K}_{12}(s,t) \\ \mathbb{K}_{21}(s,t) & \mathbb{K}_{22}(s,t) \end{pmatrix}$$

日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 Sep. 18-21, 2012. 統計数学分科会

かつ

$$\mathbb{K}_{11}(s,t) = \frac{s-t}{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)(1-st)^2}}, \qquad \mathbb{K}_{12}(s,t) = \sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}}\frac{1}{1-st},$$
$$\mathbb{K}_{21}(s,t) = -\sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}}\frac{1}{1-st}, \qquad \mathbb{K}_{22}(s,t) = \mathrm{sgn}(t-s)\arcsin\frac{\sqrt{(1-s^2)(1-t^2)}}{1-st}.$$

ただし，$\mathrm{sgn}\, t$ は $t>0$ で $\mathrm{sgn}\, t = +1$，$t<0$ で $\mathrm{sgn}\, t = -1$，$t=0$ で $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$ と定める.

ここで $\mathbb{K}(s,t)$ は，関係式 $\mathbb{K}_{ab}(s,t) = -\mathbb{K}_{ba}(t,s)$,

$$\mathbb{K}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mathbb{K}_{\overset{22}{\cancel{11}}}(s,t) & \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{K}_{22}(s,t) \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{K}_{22}(s,t) & \mathbb{K}_{22}(s,t) \end{pmatrix}$$

を満たす.

定理 1 の証明は，次の絶対値のモーメント $E[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|]$ を求める問題に帰着される.

定理 2. $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ が互いに異なるとき,

$$E[|f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)|] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Pf}(\mathbb{K}(t_i,t_j))_{1\le i,j\le n}$$

が成り立つ．ここで，$\Sigma = \left(\frac{1}{1-t_it_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ とおいた.

また，次のように $f(t)$ の符号の偶数次モーメント $E[\mathrm{sgn}\, f(t_1)\cdots\mathrm{sgn}\, f(t_{2n})]$ もパフィアンで書ける．なお，n が奇数の場合，$E[\mathrm{sgn}\, f(t_1)\cdots\mathrm{sgn}\, f(t_n)]$ は恒等的に零である.

定理 3. $t_1, t_2, \ldots, t_{2n} \in I$ が互いに異なるとき,

$$E[\mathrm{sgn}\, f(t_1)\,\mathrm{sgn}\, f(t_2)\cdots\mathrm{sgn}\, f(t_{2n})] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \prod_{1\le i<j\le 2n}\mathrm{sgn}(t_j-t_i)\cdot\mathrm{Pf}(\mathbb{K}_{22}(t_i,t_j))_{1\le i,j\le 2n}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] M. Kac, On the average number of real roots of a random algebraic equation, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 314–320.

[2] Y. Peres and B. Virág, Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process, Acta Math. **194** (2005), 1–35.

[3] 白井朋之, The zeros of random analytic functions, 2011 年度確率論シンポジウム 講演アブストラクト.