

平成 31 年度  
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験 2 次募集  
博士前期課程 数理情報科学専攻  
数学

平成 31 年 2 月 13 日 13:00 - 16:00

注意

- (1) 配付物は、問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.
- (2) 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはならない.
- (3) 出題数は **1**, **2**, **3**, **4** の 4 題で、4 題とも解答せよ.
- (4) 試験開始後、すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
- (5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
- (6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

1 次の各問いに答えよ.

(1) 関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は,  $x = 0$  で微分可能であるかどうか調べよ.

(2) 関数  $\sqrt{1+x}$  のマクローリン展開を

$$\sqrt{1+x} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + r(x) \quad (-1 < x < 1)$$

と表す. ただし  $r(x)$  は 3 次以上の項を表す. このとき, 定数  $c_0, c_1, c_2$  を求めよ.

(3) 次の広義積分をそれぞれ計算せよ.

$$(i) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x}} dx \qquad (ii) \int_1^\infty x^2 e^{-x} dx$$

2 次の各問いに答えよ.

(1) 次の関数の極限が存在しないことを示せ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^3 + y^3}$$

(2) 関数  $f(x, y) = x^3 + x^2y + y^2 + 2y$  の極値と, 極値をとる点をすべて求めよ.

(3) 次の重積分をそれぞれ計算せよ.

$$(i) \iint_D xy^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

$$(ii) \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

3 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  について、次の各問いに答えよ。ただし、 $I$  は単位行列である。

(1)  $A$  の固有多項式  $\Phi_A(t)$  を求めよ。

(2)  $A^4 - 6A^3 + 6A^2 - 5A + 5I$  を求めよ。

(3)  $A^4 - 6A^3 + 6A^2 - 5A + 5I$  の固有値とそれぞれに対応する固有空間を求めよ。

4 3次元実ベクトル空間  $\mathbf{R}^3$  の標準基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により与えておく。線形写像  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  を

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - 3z \\ y - 7z \end{pmatrix}$$

により定義する。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 標準基底に関する  $f$  の表現行列  $A$  を求めよ。

(2)  $f$  の像  $\text{Im}(f)$  の次元を求めて、 $\text{Im}(f)$  の基底を1つ定めよ。

(3)  $f$  の核  $\text{Ker}(f)$  の基底を1つ定めよ。