平成 30 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験 2 次募集
博士前期課程　数理情報科学専攻
数学

平成 30 年 2 月 8 日　13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の広義積分を計算せよ.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\log x\, dx$　　　(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\, dx$

(2) 平面 $\mathbf{R}^2$ 上定義された次の関数 $f(x,y)$ を考える.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) 偏導関数 $f_x(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ f_y(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ.
さらに, $f_x(x,y), f_y(x,y)$ が原点で連続であるかどうか調べよ.

(b) 次の広義積分が存在することを示せ.

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left|\frac{f(x,y)}{xy}\right|\, dxdy=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1}\left|\frac{f(x,y)}{xy}\right|\, dxdy$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\iint_{\substack{0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq x}}\frac{2y}{x+1}\, dxdy$　　　(b) $\displaystyle\iint_{\substack{0\leq x+y\leq 2\\ 0\leq x-y\leq 2}}(x+y)e^{x-y}\, dxdy$

(2) 関数 $f(x)$ は $(0,\infty)$ 上 C^1-級とし, さらに次の条件を満たすとする.

$$f(1)=1,\ f(x)>0\ (x\in[1,\infty)),\quad f'(x)\leq\frac{1}{x^2}f(x)\ (x\in[1,\infty))$$

(a) 不等式 $\log f(x)\leq\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t^2}\, dt\ (x\in[1,\infty))$ を示せ.

(b) 関数 $f(x)$ は $[1,\infty)$ 上有界であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ A を n 次の実正方行列とする．

(1) 相異なる 2 つの実数 a, b がともに A の固有値であり，$\boldsymbol{x}$ は a，$\boldsymbol{y}$ は b に属する A の固有ベクトルであるとき，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が 1 次独立であることを示せ．

(2) A は n 個の相異なる実固有値をもつとき対角化可能であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ V を 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間とし，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ とする．さらに，T を

$$T(M) = AM \qquad (M \in V)$$

によって定まる V の線形変換とする．

(1) V の部分空間で，零空間でも V 自身でもないものを 1 つ挙げよ．

(2) 2 次の実正方行列のうち正則でないもの全体は V の部分空間ではない．理由を述べよ．

(3) T の階数を求めよ．

(4) $\mathcal{B}$ が V を生成することを示せ．

(5) T の $\mathcal{B}$ に関する表現行列を求めよ．