平成30年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻
数学

平成29年8月21日　13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3枚), 解答用紙 (B4, 4枚), 草案用紙 (B4, 4枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の4題で, 4題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の広義積分が収束するかどうか判定し, 収束するならばその値を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$

(2) 次の関数が原点で連続でないことを示せ. さらに, 原点で x および y に関して偏微分可能であることを示せ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の積分の値を求めよ.

(a) $\displaystyle\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ 0\leq x,0\leq y}} xy\,dxdy$ (b) $\displaystyle\iint_{\substack{0\leq x\leq 2\\ 0\leq y\leq 4-2x}} e^{2x-y}\,dxdy$

(2) 平面 $\mathbf{R}^2$ 上定義された C^1 級の関数 $f(x,y)$ が, 次の条件を満たしたとする.

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\qquad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を考える.

(a) 合成関数の微分法則を用いて次を導け.

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y},\qquad r\frac{\partial f}{\partial r}=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

(b) $f(x,y)$ は, ある 1 変数関数 F を用いて $f(x,y)=F(r)=F(\sqrt{x^2+y^2})$ と書き表せる, つまり θ によらないことを示せ. さらに, $F(r)$ が C^1 級であることを示せ.

(c) 次の等式を示せ. ただし, 関数 F は (b) で得られた関数とする.

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,dxdy=2\pi\left\{F(1)-2\int_0^1 rF(r)\,dr\right\}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 14 & 8 & 15 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とし，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間を W とする．

(1) W の基を 2 組あげよ．

(2) W の有限個のベクトルの組で，W を生成するが W の基ではないものを 1 組あげよ．

(3) 集合 $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ と集合 $\{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in W\}$ が等しくなるような $\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(4) (3) で求めたベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して集合 $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ と集合 $\{\boldsymbol{c} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in W\}$ が等しくなるようなベクトル $\boldsymbol{c}$ で，$\boldsymbol{a}$ と異なるものを 1 つあげよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ U, V を体 K 上のベクトル空間，$T\colon U \to V$ を線形写像とし，T の核を $\mathrm{Ker}(T)$ と書く．さらに，U 上の関係 $\equiv$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}' \iff \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}' \in \mathrm{Ker}(T)$$

(1) 関係 $\equiv$ が同値関係であることを示せ．

(2) $\{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}(T)\} \subseteq \{\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}(T)\}$ ならば $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}'$ であることを示せ．

(3) $\equiv$ に関する商集合を $U/\mathrm{Ker}(T)$ と書く．

(i) T が零写像のとき，$U/\mathrm{Ker}(T)$ はどのような集合か答えよ．

(ii) T が同型写像のとき，$U/\mathrm{Ker}(T)$ はどのような集合か答えよ．