平成 29 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻
数学

平成 28 年 8 月 18 日　13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 平面 $\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y) = e^{3x} - 3e^x y + y^3$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 f_x と f_y を求め，$f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) ２階偏導関数 f_{xx}, f_{xy} 及び f_{yy} を求めよ．

(3) $f(x,y)$ が極値をもつならば，それを求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数列 $\{f_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を

$$f_0(x) = 1, \qquad f_n(x) = 1 + \int_0^x f_{n-1}(t)dt \quad (n \geqq 1)$$

と定義する．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $f_1(x)$, $f_2(x)$ と $f_n(x)$ を求めよ．さらに $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおくとき，$f(x)$ を求めよ．

(2) 平面 $\mathbf{R}^2$ の領域 D_n を $D_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \, x^2 + y^2 \leqq n^2\}$ で定義するとき，(1) で求めた関数 $f(x)$ に対して重積分

$$\iint_{D_n} f(-x^2) f(-y^2) dxdy$$

を求めよ．

(3) (1) で求めた関数 $f(x)$ に対して広義積分 $\iint_{\mathbf{R}^2} f(-x^2) f(-y^2) dxdy$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次の行列 A の逆行列を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 実ベクトル空間 V の元 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$ について，これらが一次独立なら $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ も一次独立である．このことを一次独立性の概念の定義に即して証明せよ．

(3) 実ベクトル空間 $\mathbf{R}^2$ から実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$$

への線型写像の例を具体的に二つあげよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ V を内積 $(\cdot,\cdot)$ が定義された 2 次元実ベクトル空間とする．また $\vec{a}$, $\vec{b}$ を V の基底とし，$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$ と仮定する（ただし $\|\cdot\|$ は内積 $(\cdot,\cdot)$ から定まる V のノルム）．さらに V 上の線型変換 f を $f\big(\vec{v}\big) = \big(\vec{b},\vec{v}\big)\vec{a} + \big(\vec{a},\vec{v}\big)\vec{b}$ と定める．次の各問いに答えよ．

(1) 任意の $\vec{v},\vec{w} \in V$ に対して $\big(f(\vec{v}),\vec{w}\big) = \big(\vec{v}, f(\vec{w})\big)$ が成立する．このことを示せ．

(2) 基底 $\vec{a},\vec{b}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) f の固有値をすべて求めよ．

(4) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(5) f の表現行列が対角行列となるような V の基底を一組あげよ．