平成28年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成27年8月18日 (火)　13:00–16:00

注意.

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

実数全体のなす集合を $\mathbf{R}$ と書くことにする．

$\boxed{1}$ V を1次独立なベクトルの最大個数が3であるような $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とし，V の3個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbf{R}$ 上1次独立であるとする．

(1) 6つの実数 a, a', b, b', c, c' が

$$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = a'\boldsymbol{v}_1 + b'\boldsymbol{v}_2 + c'\boldsymbol{v}_3$$

をみたすとき，$a = a', b = b', c = c'$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が V の基底であることを基底の定義に即して示せ．

$\boxed{2}$ $\mathbf{R}^3$ を $\mathbf{R}$ 上の3次元数ベクトル空間とし，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．次の各問いに答えよ．

(1) ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が $\mathbf{R}$ 上1次独立であることを1次独立性の定義に即して示せ．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ をそれぞれ第1列，第2列，第3列とする正方行列 M に逆行列があれば求めよ．

(3) 写像 $(\ ,\ )\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $\mathbf{R}^3$ の2つのベクトル $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + b_3\boldsymbol{v}_3$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ と定める．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および M を用いて $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を表せ．

(4) 3次の実正方行列 A, B に対して行列 $A \odot B$ を (i, j) 成分が $({}^t\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}'_j)$ であるような3次の実正方行列と定める．(ただし ${}^t\boldsymbol{a}_i$ は A の第 i 行を転置して得られるベクトル，$\boldsymbol{b}'_j$ は B の第 j 列，$(\ ,\ )$ は (3) で与えた写像とする．)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，$A \odot B$ を求めよ．

(5) 3次の実正方行列 X は3次のどんな実正方行列 A に対しても $A \odot X = A$ をみたすとする．このとき行列 X を求めよ．(ただし，$\odot$ は (4) で与えた演算とする．)

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の各問いに答えよ.

(1) $u \geq \pi$ とする. 部分積分を用いて次の等式を示せ.

$$\int_{\pi}^{u} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{1}{\pi} - \frac{\cos u}{u} - \int_{\pi}^{u} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

(2) 関数 $f(u) = \displaystyle\int_{\pi}^{u} \frac{\sin x}{x} dx$ を考える. (1) の等式を用いて, $f(u)$ が $[\pi, \infty)$ 上で有界であることを示せ.

(3) n を正の整数とする. 次の不等式を示せ.

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

(4) 関数 $g(u) = \displaystyle\int_{\pi}^{u} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ を考える. (3) の不等式を用いて, $g(u)$ が $u \to \infty$ で発散することを示せ. 必要であれば, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを用いてもよい.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の各問いに答えよ.

(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x, y) = x^3 + x^2 + 3y^2 - 6y + 3$ の極値をすべて求めよ.

(2) 平面 $\mathbb{R}^2$ の閉領域 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x + y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

と定義する. D を図示し, 積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を求めよ.