平成 27 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成 26 年 8 月 19 日 (火)　13:00–16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の行列の行列式を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 実ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^2$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ を $(\vec{v},\vec{w}) = {}^t\vec{v}S\vec{w}$ と定める. この内積に関する V の正規直交基底を一組あげよ. ただし S は次のような 2 次正方行列とする.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

また ${}^t\vec{v}$ は $\vec{v}$ の転置を表す.

(3) 次の実ベクトル空間 V の部分空間の具体例を 4 つあげよ.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; a - b + c - d = 0 \right\}.$$

またそのひとつについて, 実際に V の部分空間であることを証明せよ. 部分空間の概念の定義に即して説明すること.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 実ベクトル空間 V が n 次元である（つまり V には n 個の一次独立なベクトルの組が存在するが, $n+1$ 個以上の一次独立なベクトルの組は存在しない）とする. このとき V の n 個の一次独立なベクトルの組 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ は V の基底となる. この事実を, 次元と一次独立性と基底の概念の定義に即して証明せよ.

(2) V を n 次の実正方行列全体のなすベクトル空間とする. また A を $A^2 = O$ となる n 次の実正方行列とする（O は零行列）. これに対して V 上の線型変換 f, g を

$$f(X) = AX - XA, \qquad g(X) = AX + XA$$

と定める. このとき f の像 $\operatorname{Im} f$ と g の核 $\operatorname{Ker} g$ に関して $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ が成り立つ. このことを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の関数 $f = f(x,y)$ について，次の各問いに答えよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で偏微分可能であることを示せ．

(3) 関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であるとは

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

をみたす $o(h,k)$ が存在して

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + o(h,k)$$

と表せるときをいう．ただし，A, B は h, k に無関係な定数である．与えられた関数は原点 $(0,0)$ で全微分可能であるか，調べよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a, b > 0$ に対し，閉領域 D を

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \right\}$$

により定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 変数変換 $x = aX,\ y = bY$ を考える．D に対応する XY 平面内の閉領域 D' を求めよ．

(2) (1) で求めた D' に対し，定積分 $\displaystyle\iint_{D'} (X^2 - Y^2)\,dXdY$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\iint_{D} (x^2 + y^2)\,dxdy$ を求めよ．