平成26年度

鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験(2次募集)

博士前期課程　数理情報科学専攻

数学

平成26年2月12日(水)　13:00-16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3枚), 解答用紙 (B4, 4枚), 草案用紙 (B4, 4枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の4題で, 4題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 次の行列の行列式の値を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列 A を対角化せよ．$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P も明記すること．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(3) 次の行列 B のべき乗 B^n（n は自然数とする）を求めよ．

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ 次の各問いに答えよ．

(1) V を複素ベクトル空間，$T\colon V \to V$ を $\mathbf{C}$ 上の線形変換とする．

(i) T の固有値 $\lambda \in \mathbf{C}$ に対し，λ に属する T の固有ベクトルの定義を述べよ．

(ii) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を T の互いに異なる固有値とする．$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ がそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に属する固有ベクトルのとき，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は $\mathbf{C}$ 上一次独立となることを示せ．

(2) V を実ベクトル空間とし，$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を V の任意のベクトルとする．V の部分空間のあいだに

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$$

という等式が成り立つことを示せ．ただし $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s \rangle$ は，ベクトル $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s \in V$ が生成する V の部分空間を表す．

(3) 2 次実正方行列の全体 $M_2(\mathbf{R})$ を，行列の加法とスカラー倍で実ベクトル空間とみなす．(従って，$M_2(\mathbf{R})$ は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を基底とする 4 次元のベクトル空間となる.）対称行列の全体のなす部分集合を

$$W = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid {}^t\!A = A\}$$

とおくとき，以下に答えよ．

(i) W が $M_2(\mathbf{R})$ の部分空間となることを示せ．

(ii) W のひと組の基底を与えよ．(実際に基底となっていることは証明しなくてよい．)

$\boxed{3}$ 次の命題が正しければ証明し，誤りであれば理由を述べよ．

(1) $x=0$ の近傍で定義された関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能ならば，$x=0$ で連続である．

(2) 関数 $f(x)$ が $[1,\infty)$ 上連続で $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ならば，広義積分 $\int_1^\infty f(x)\,dx$ は存在する．

(3) 数列 $\{a_n\}$ について $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．

(4) 関数 $f(x)=\begin{cases} x\log x & (x>0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ は $x=0$ で連続である．

(5) 広義積分 $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$ は存在する．

$\boxed{4}$ α を実数とする．$0<\varepsilon<1$ とし，

$$D_\varepsilon = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid \varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$$

とおく．また，

$$\Omega = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid |x|+|y| \le 1\}$$

とおく．

(1) $\iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$ を極座標変換を用いて計算せよ．

(2) $\lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$ が存在するような α の範囲を求めよ．

(3) 自然数 m,n について，変数変換 $x=\frac{s+t}{2}, y=\frac{s-t}{2}$ を用いて，次の積分を計算せよ．

$$\iint_\Omega (x+y)^m (x-y)^n\,dxdy$$