

平成23年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程 数理情報科学専攻
数学

平成23年2月15日(火) 13:00-16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は **1**, **2**, **3**, **4** の 4 題で, 4 題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 次の各問いに答えよ.

(1) $\text{rank } A$ を求めよ.

(2) \mathbb{R}^4 の部分集合 V を

$$V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0 \right\}$$

とする. V は \mathbb{R}^4 の部分ベクトル空間であることを示せ.

(3) V の基底を求めよ.

2 $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ とする. 次の各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の各固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) A は対角化可能か否かを述べよ. さらに, 対角化可能ならば対角化せよ.

3 関数 $f(x, y) = x^4 + 2x^2 - 4xy + y^2 + 1$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の 1 階偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ となる点 (a, b) を求めよ.

(3) $f(x, y)$ の 2 階偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ.

(4) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

4 次の各問いに答えよ.

(1) $D_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$ とおくとき, 次の積分を計算せよ.

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ のとき, 次の広義積分を求めよ.

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$