平成２２年度入学大学院入学試験問題
数学
２００９年8月２４日（１３時〜１６時）

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 次の行列式を計算せよ.

$$\det\begin{pmatrix} 2009 & 2009 & 2009 & 2009 \\ 2009 & 2009 & 2009 & 2010 \\ 2009 & 2009 & 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 & 2010 & 2010 \end{pmatrix}.$$

(2) 次の行列の階数を求めよ（a の値に依存する）.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 内積空間において, 互いに直交するベクトルの組 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ は一次独立であることを示せ. ただし, どのベクトルも零ベクトルではないとする.

$\boxed{2}$ n 次複素正方行列全体のなす複素ベクトル空間を Mat_n と表す. また n 次複素対称行列全体を Sym_n と表す. ただし, ${}^tX = X$ となる正方行列 X を対称行列という. 次の各問いに答えよ.

(1) Sym_n は Mat_n の部分空間であることを示せ.

(2) $A \in \mathrm{Mat}_n$, $X \in \mathrm{Sym}_n$ に対して, $\Phi_A(X) = {}^tAX + XA$ とおく. この $\Phi_A(X)$ が Sym_n に属することを示せ.

(3) Sym_n から Sym_n への写像 Φ_A が線形写像であることを示せ.

(4) Sym_2 の基底を一組あげよ.

- 以下, $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(5) (4) であげた基底に関する Φ_A の表現行列を求めよ.

(6) Φ_A の表現行列が対角行列になるような Sym_2 の基底を一組求めよ.

$\boxed{3}$ 次の各問に答えよ.

(1) 次の関数 $f(x)$ は閉区間 $[-1,1]$ で連続であることを示せ.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^{-1}x+x^2-x}{x\sin x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

(2) $f(x)$ を連続関数とする. 次の導関数を f を用いて表せ.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{2x-1}^{x^2} tf(t)\,dt\right)$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}$$

$\boxed{4}$ 次の各問に答えよ.

(1) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2+2xy-y^2$ の極値を求めよ.

(2) 領域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq x\}$ とする. 領域 D を図示し, 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D x\,dxdy.$$

必要であれば, 次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & n:\text{偶数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & n:\text{奇数}\end{cases}$$

ただし, $0!!=(-1)!!=1,\quad n!!=\begin{cases}n(n-2)(n-4)\cdots 2 & n:\text{偶数}\\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & n:\text{奇数}\end{cases}$