Mamdani方式のファジィ制御とファジィ関係

（関係計算的立場からのサーベイ）

古澤 仁

鹿児島大学・数理情報

数理情報科学談話会
2011年7月22日

何を今更？

- 1976 年：Mamdani がファジィ理論の制御への応用法を提示
- 1980 年：デンマークのセメント会社が紛体炉を Mamdani 方式のファジィ制御を用いて営業運転

何を今更？

- 1976 年：Mamdani がファジィ理論の制御への応用法を提示
- 1980 年：デンマークのセメント会社が紛体炉を Mamdani 方式のファジィ制御を用いて営業運転
- 1998 年：「Algebraic Formalisations of Fuzzy Relations and Their Representation Theorems」

何を今更？

- 1976年：Mamdaniがファジィ理論の制御への応用法を提示
- 1980年：デンマークのセメント会社が紛体炉をMamdani方式のファジィ制御を用いて営業運転
- 1998年：「Algebraic Formalisations of Fuzzy Relations and Their Representation Theorems」
- 2011年：Winterの素敵なチュートリアル@ RAMiCS12「Relation Algebraic Approaches to Fuzzy Relations」

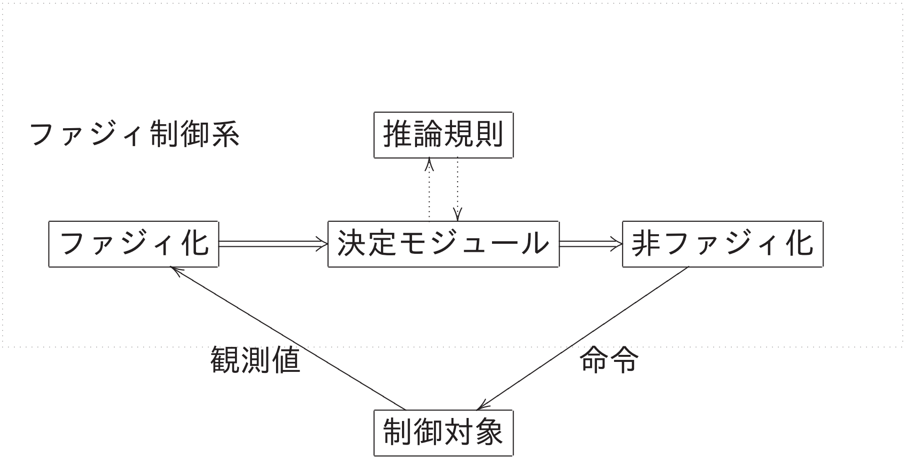
参考

- 電気学会編「あいまいとファジィ　ーその計測と制御ー」オーム社（1991）
- 日本ファジィ学会編「ファジィとソフトコンピューティングハンドブック」共立出版（2000）
- Winter の素敵なチュートリアル@ RAMiCS12 のスライド
- Winter との個人的なやりとり

発表の流れ

1. Mamdani 方式のファジィ制御
2. 感想・欲求
3. ファジィ関係
4. まとめ

Mamdani方式のファジィ制御（概観）



ファジィ集合

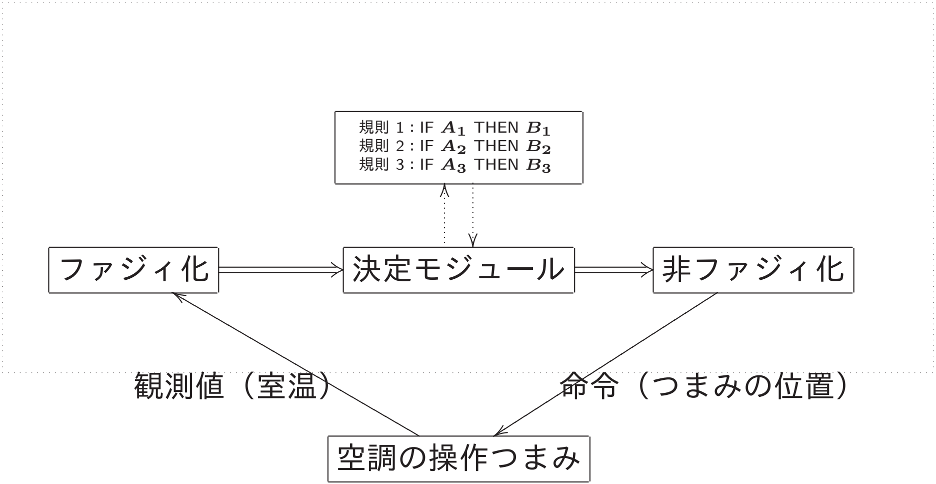
X : 集合

ファジィ集合 $A\colon X \to [0,1]$

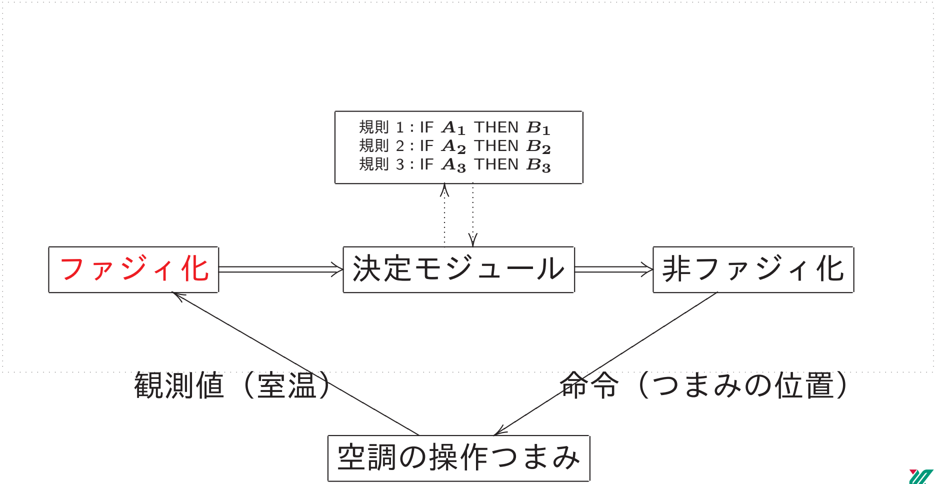
集合演算

$$(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x))$$
$$(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x))$$

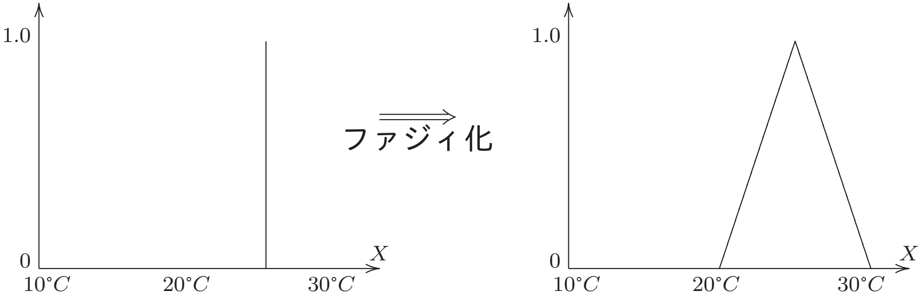
Mamdani方式のファジィ制御（例）



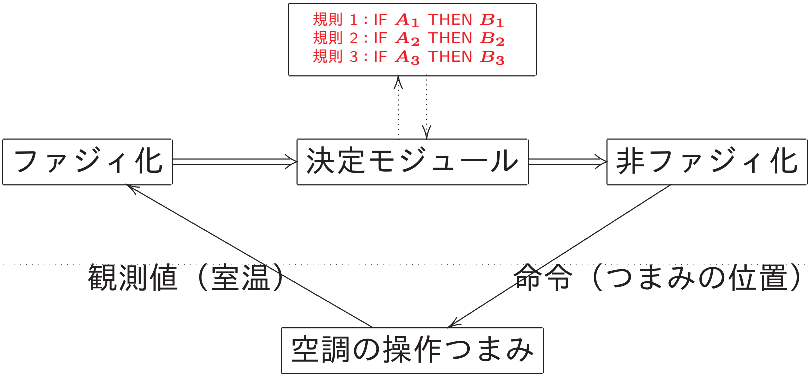
Mamdani方式のファジィ制御（例）
ファジィ化



Mamdani方式のファジィ制御（例）
ファジィ化



Mamdani方式のファジィ制御（例）推論規則



Mamdani方式のファジィ制御（例）推論規則

規則1：IF A_1 THEN B_1
規則2：IF A_2 THEN B_2
規則3：IF A_3 THEN B_3

A_i，B_i は自然言語で与えられる

Mamdani方式のファジィ制御（例）推論規則

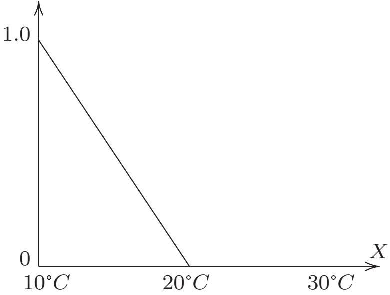
規則1：IF A_1 THEN B_1
規則2：IF A_2 THEN B_2
規則3：IF A_3 THEN B_3

A_i, B_i は自然言語で与えられる

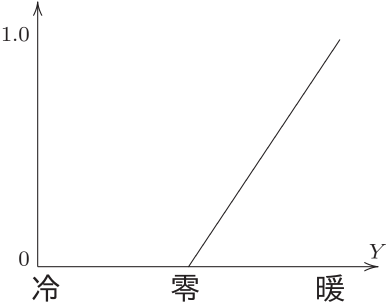
規則1：IF 気温が低 THEN つまみは暖
規則2：IF 気温が適 THEN つまみは零
規則3：IF 気温が高 THEN つまみは冷

Mamdani 方式のファジィ制御（例）推論規則

自然言語に対応するファジィ集合が準備されている



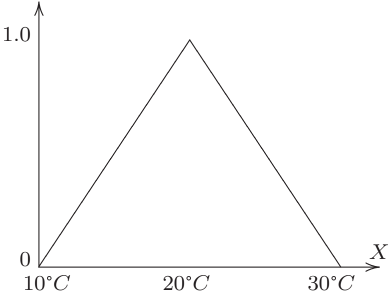
A_1 : 気温が低



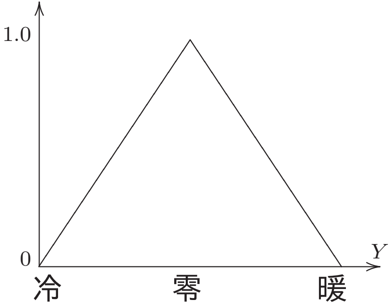
B_1 : つまみは暖

Mamdani方式のファジィ制御（例）推論規則

自然言語に対応するファジィ集合が準備されている



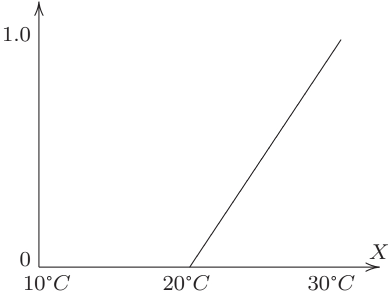
A_2：気温が適



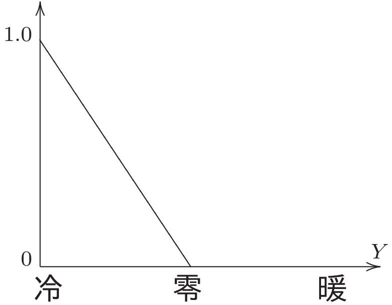
B_2：つまみは零

Mamdani方式のファジィ制御（例）推論規則

自然言語に対応するファジィ集合が準備されている

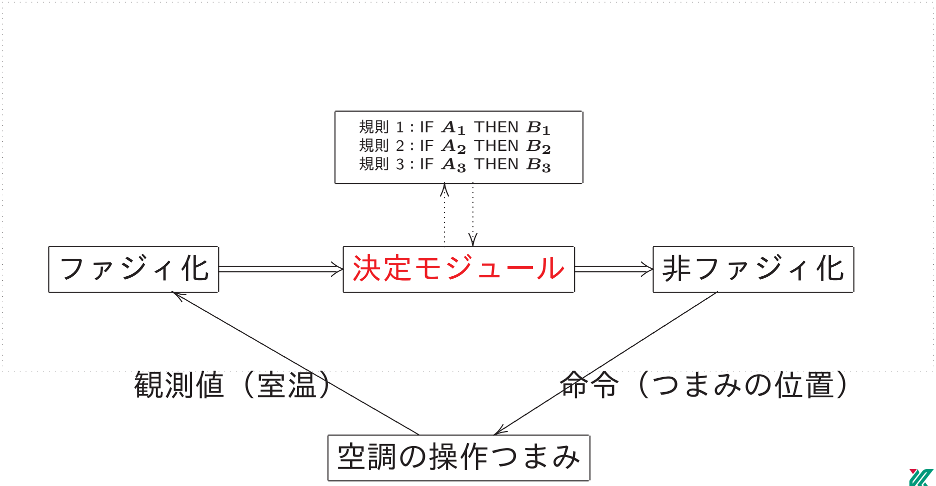


A_3：気温が高



B_3：つまみは冷

Mamdani方式のファジィ制御（例）決定モジュール



Mamdani 方式のファジィ制御（例）決定モジュール

ファジィ化された室温データ（ファジィ集合）A' から，規則 1，2，3 に従いファジィ集合 B' を求める

Mamdani方式のファジィ制御（例）決定モジュール

ファジィ化された室温データ（ファジィ集合）A' から，規則 1，2，3 に従いファジィ集合 B' を求める

1. A_i に対して，照合度 a_i を求める．
   $a_i = \sup_x \min(A'(x), A_i(x))$

Mamdani方式のファジィ制御（例）決定モジュール

ファジィ化された室温データ（ファジィ集合）A' から，
規則1，2，3に従いファジィ集合 B' を求める

1. A_i に対して，照合度 a_i を求める.
   $a_i = \sup_x \min(A'(x), A_i(x))$
2. 規則ごとに推論結果 B'_i を求める.
   $B'_i(y) = \min(a_i, B_i(y))$

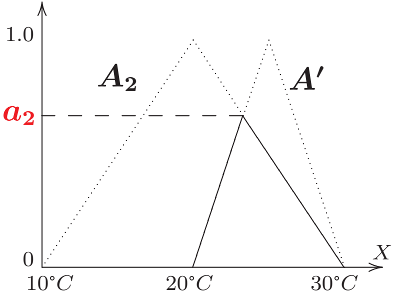
Mamdani方式のファジィ制御（例）決定モジュール

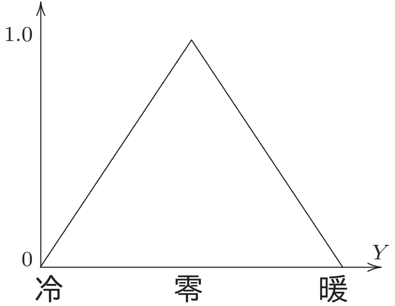
ファジィ化された室温データ（ファジィ集合）A' から，規則 1，2，3 に従いファジィ集合 B' を求める

1. A_i に対して，照合度 a_i を求める．
   $a_i = \sup_x \min(A'(x), A_i(x))$
2. 規則ごとに推論結果 B'_i を求める．
   $B'_i(y) = \min(a_i, B_i(y))$
3. 規則ごとに求めた推論結果を統合して B' を求める．
   $B' = \cup_i B'_i$

Mamdani 方式のファジィ制御（例）決定モジュール

$$a_2 = \sup_x \min(A'(x), A_2(x))$$

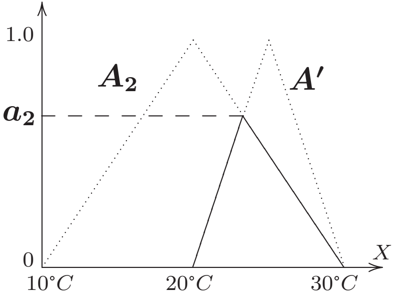


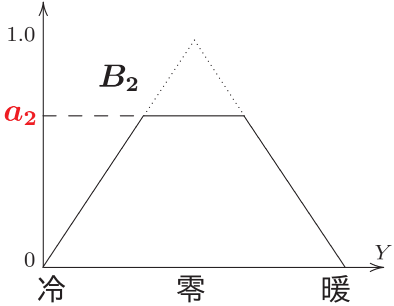


B_2 : つまみは零

Mamdani方式のファジィ制御（例）決定モジュール

$$B'_2(y) = \min(a_2, B_2(y))$$

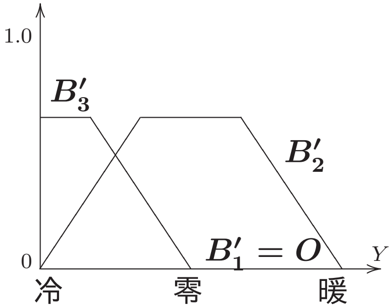




B'_2：規則２の推論結果

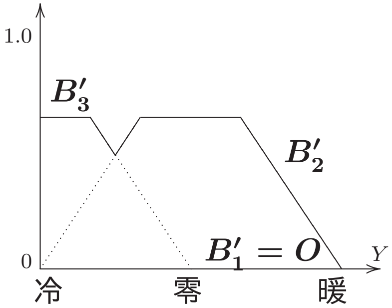
Mamdani方式のファジィ制御（例）決定モジュール

$$B_1', \ B_2', \ B_3'$$

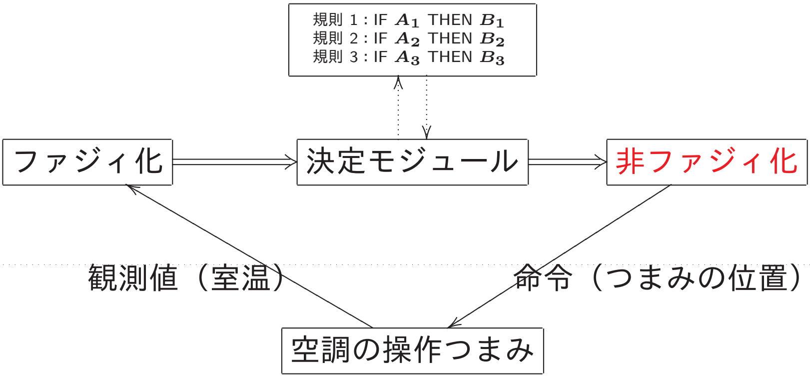


Mamdani方式のファジィ制御（例）決定モジュール

$$B' = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$$

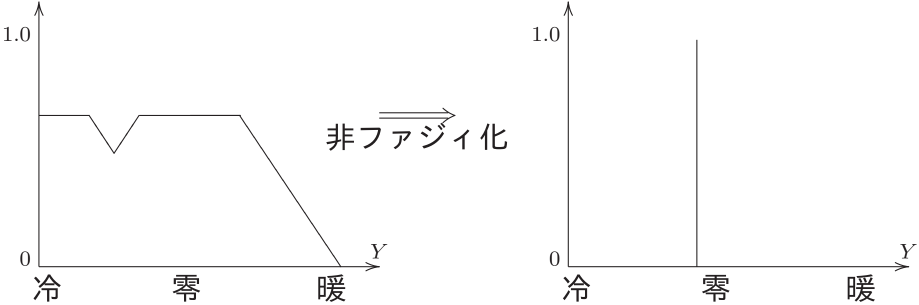


Mamdani方式のファジィ制御（例）非ファジィ化



Mamdani方式のファジィ制御（例）非ファジィ化

CG（center of gravity，重心）法 $\dfrac{\int_Y y \cdot B'(y)dy}{\int_Y B'(y)dy}$



B'：決定モジュールの出力

感想

- 非ファジィ化は数式で与えられていてほっとする.

感想

- 非ファジィ化は数式で与えられていてほっとする．（個人的には $\int$ はギョッとするけど $\cdots$ ）

感想

- 非ファジィ化は数式で与えられていてほっとする．（個人的には $\int$ はギョッとするけど $\cdots$ ）
- それ以外のところは，もっとシンプルに書けないのか？

感想

- 非ファジィ化は数式で与えられていてほっとする．（個人的には $\int$ はギョッとするけど $\cdots$ ）
- それ以外のところは，もっとシンプルに書けないのか？
- 数式による仕様？

復習（決定モジュール）

1. 照合度：$a_i = \sup_x \min(A'(x), A_i(x))$
   $(X \to [0,1]) \times (X \to [0,1]) \to [0,1]$

復習（決定モジュール）

1. 照合度：$a_i = \sup_x \min(A'(x), A_i(x))$
   $(X \to [0,1]) \times (X \to [0,1]) \to [0,1]$
2. 推論規則：$B'_i(y) = \min(a_i, B_i(y))$
   $[0,1] \times (X \to [0,1]) \to (X \to [0,1])$

復習（決定モジュール）

1. 照合度：$a_i = \sup_x \min(A'(x), A_i(x))$
   $(X \to [0,1]) \times (X \to [0,1]) \to [0,1]$
2. 推論規則：$B'_i(y) = \min(a_i, B_i(y))$
   $[0,1] \times (X \to [0,1]) \to (X \to [0,1])$
3. 統合：$B' = \cup_i B'_i$
   $(X \to [0,1]) \times \cdots \times (X \to [0,1]) \to (X \to [0,1])$

ファジィ関係

X, Y : 集合,

ファジィ関係 α: $X \times Y \to [0, 1]$

ファジィ関係

X, Y : 集合,

ファジィ関係 $\alpha : X \times Y \to [0, 1]$

ファジィ関係に特有の演算

$$(\alpha^\sharp)(x, y) = \alpha(y, x)$$
$$(\alpha; \beta)(x, y) = \sup_z \min(\alpha(x, z), \beta(z, y))$$

ファジィ集合からファジィ関係へ

X : 集合， I : 1 点集合 $\{*\}$

$$X \to [0,1] \quad \Longleftrightarrow \quad I \times X \to [0,1]$$

$$\begin{array}{rcl} C & \mapsto & \gamma : \gamma(*,x) = C(x) \\ C : C(x) = \gamma(*,x) & \leftarrow\!\shortmid & \gamma \end{array}$$

決定モジュールはファジィ関係！

X, Y : 集合，　I : 1 点集合 $\{*\}$

読み替え

$$
\begin{array}{lll}
\text{前件部} & A_i\colon X \to [0,1] & \alpha_i\colon I \times X \to [0,1] \\
\text{後件部} & B_i\colon Y \to [0,1] & \beta_i\colon I \times Y \to [0,1] \\
\text{入力} & A'\colon X \to [0,1] & \alpha'\colon I \times X \to [0,1]
\end{array}
$$

決定モジュールはファジィ関係！

X, Y : 集合, I : 1 点集合 $\{*\}$

読み替え

前件部	$A_i\colon X \to [0,1]$	$\alpha_i\colon I \times X \to [0,1]$
後件部	$B_i\colon Y \to [0,1]$	$\beta_i\colon I \times Y \to [0,1]$
入力	$A'\colon X \to [0,1]$	$\alpha'\colon I \times X \to [0,1]$

出力 : $\cup_i(\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i) = \alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

確認（照合度）

$$\boldsymbol{a_i = (\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *)}$$

確認（照合度）

$$a_i = (\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *)$$

$$a_i = \sup_x \min(A'(x), A_i(x))$$

確認（照合度）

$$a_i = (\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *)$$

$$\begin{aligned} a_i &= \sup_x \min(A'(x), A_i(x)) \\ &= \sup_x \min(\alpha'(*, x), \alpha_i(*, x)) \end{aligned}$$

確認（照合度）

$$a_i = (\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *)$$

$$\begin{aligned} a_i &= \sup_x \min(A'(x), A_i(x)) \\ &= \sup_x \min(\alpha'(*, x), \alpha_i(*, x)) \\ &= \sup_x \min(\alpha'(*, x), \alpha_i^\sharp(x, *)) \end{aligned}$$

確認（照合度）

$$a_i = (\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *)$$

$$\begin{aligned} a_i &= \sup_x \min(A'(x), A_i(x)) \\ &= \sup_x \min(\alpha'(*, x), \alpha_i(*, x)) \\ &= \sup_x \min(\alpha'(*, x), \alpha_i^\sharp(x, *)) \\ &= (\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *) \end{aligned}$$

確認（推論規則）

$$\forall y \in Y.\ \min(a_i, B_i(y)) = (\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i)(*, y)$$

確認（推論規則）

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}.\ \min(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{y})) = (\alpha'; \alpha_i^{\sharp}; \beta_i)(*, \boldsymbol{y})$$

$$\min(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{y}))$$

確認（推論規則）

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}.\ \min(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{y})) = (\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i)(*, \boldsymbol{y})$$

$$\begin{aligned} & \min(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{y})) \\ = \quad & \min((\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *), \beta_i(*, \boldsymbol{y})) \end{aligned}$$

確認（推論規則）

$$\forall y \in Y.\ \min(a_i, B_i(y)) = (\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i)(*, y)$$

$$\begin{aligned} & \min(a_i, B_i(y)) \\ = \quad & \min((\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *), \beta_i(*, y)) \\ = \quad & \sup_* \min((\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *), \beta_i(*, y)) \end{aligned}$$

確認（推論規則）

$$\forall y \in Y.\ \min(a_i, B_i(y)) = (\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i)(*, y)$$

$$\begin{aligned} & \min(a_i, B_i(y)) \\ = \quad & \min((\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *), \beta_i(*, y)) \\ = \quad & \sup_* \min((\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *), \beta_i(*, y)) \\ = \quad & ((\alpha'; \alpha_i^\sharp); \beta_i)(*, y) \end{aligned}$$

確認（推論規則）

$$\forall y \in Y.\ \min(a_i, B_i(y)) = (\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i)(*, y)$$

$$\begin{aligned} & \min(a_i, B_i(y)) \\ = \quad & \min((\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *), \beta_i(*, y)) \\ = \quad & \sup_* \min((\alpha'; \alpha_i^\sharp)(*, *), \beta_i(*, y)) \\ = \quad & ((\alpha'; \alpha_i^\sharp); \beta_i)(*, y) \\ = \quad & (\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i)(*, y) \end{aligned}$$

確認（決定モジュール）

入力： α'

出力： $\alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

確認（決定モジュール）

入力： α'
出力： $\alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

1. 照合： $\alpha'; \alpha_i^\sharp$

確認（決定モジュール）

入力： α'
出力： $\alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

1. 照合： $\alpha'; \alpha_i^\sharp$
2. 推論： $\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i$

確認（決定モジュール）

入力： α'

出力： $\alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

1. 照合： $\alpha'; \alpha_i^\sharp$
2. 推論： $\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i$
3. 統合： $\cup_i(\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i) = \alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

確認（決定モジュール）

入力： α'

出力： $\alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

1. 照合： $\alpha'; \alpha_i^\sharp$
2. 推論： $\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i$
3. 統合： $\cup_i(\alpha'; \alpha_i^\sharp; \beta_i) = \alpha'; (\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i))$

決定モジュール： $\cup_i(\alpha_i^\sharp; \beta_i)$

ファジィ化もファジィ関係で！

X：集合，　I：1点集合 $\{*\}$

準備

$$\xi_{-}\colon\ X \to (I \times X \to [0,1])$$

$$\xi_p(*, x) = \begin{cases} 1 & (x = p) \\ 0 & (x \neq p) \end{cases}$$

$$\theta\colon\ X \times X \to [0,1]$$

ファジィ化もファジィ関係で！

X : 集合，　I : 1 点集合 $\{*\}$

準備

$$\xi_{-} : X \to (I \times X \to [0,1])$$

$$\xi_p(*, x) = \begin{cases} 1 & (x = p) \\ 0 & (x \neq p) \end{cases}$$

$$\theta : X \times X \to [0,1]$$

入力　$p \in X$

ファジィ化もファジィ関係で！

X：集合，　I：1 点集合 $\{*\}$

準備

ξ_- : $X \to (I \times X \to [0,1])$

$$\xi_p(*, x) = \begin{cases} 1 & (x = p) \\ 0 & (x \neq p) \end{cases}$$

θ : $X \times X \to [0,1]$

入力　$p \in X$

出力　$\xi_p ; \theta$

考察（ファジィ化）

$$(\xi_p;\theta)(*,x) \quad = \quad \sup_{x'} \min(\xi_p(*,x'),\theta(x',x))$$

考察（ファジィ化）

$$
\begin{aligned}
(\xi_p;\theta)(*,x) &= \sup_{x'} \min(\xi_p(*,x'),\theta(x',x)) \\
&= \min(\xi_p(*,p),\theta(p,x))
\end{aligned}
$$

考察（ファジィ化）

$$\begin{aligned}(\xi_p;\theta)(*,x) &= \sup_{x'}\min(\xi_p(*,x'),\theta(x',x)) \\ &= \min(\xi_p(*,p),\theta(p,x)) \\ &= \theta(p,x)\end{aligned}$$

考察（ファジィ化）

$$
\begin{aligned}
(\xi_p;\theta)(*,x) &= \sup_{x'} \min(\xi_p(*,x'),\theta(x',x)) \\
&= \min(\xi_p(*,p),\theta(p,x)) \\
&= \theta(p,x)
\end{aligned}
$$

ファジィ化の規則を与える

考察（ファジィ化）

$$\begin{aligned}(\xi_p;\theta)(*,x) &= \sup_{x'}\min(\xi_p(*,x'),\theta(x',x)) \\ &= \min(\xi_p(*,p),\theta(p,x)) \\ &= \theta(p,x)\end{aligned}$$

ファジィ化の規則を与える $\Longleftrightarrow$ θ を与える

考察（ファジィ化）

$$\begin{aligned}(\xi_p;\theta)(*,x) &= \sup_{x'}\min(\xi_p(*,x'),\theta(x',x)) \\ &= \min(\xi_p(*,p),\theta(p,x)) \\ &= \theta(p,x)\end{aligned}$$

ファジィ化の規則を与える $\Longleftrightarrow$ θ を与える

ファジィ化： $\xi_{-};\theta$

まとめ

Mamdani 方式のファジィ制御は（「非ファジィ化」の部分を除くと）ファジィ関係の基本的な演算である.

まとめ

Mamdani 方式のファジィ制御は（「非ファジィ化」の部分を除くと）ファジィ関係の基本的な演算である.

入力 $\boldsymbol{p}$

まとめ

Mamdani 方式のファジィ制御は（「非ファジィ化」の部分を除くと）ファジィ関係の基本的な演算である.

入力	$\boldsymbol{p}$
ファジィ化の結果	$\xi_{\boldsymbol{p}}; \boldsymbol{\theta}$

まとめ

Mamdani 方式のファジィ制御は（「非ファジィ化」の部分を除くと）ファジィ関係の基本的な演算である.

入力	$\boldsymbol{p}$
ファジィ化の結果	$\boldsymbol{\xi_p};\boldsymbol{\theta}$
決定モジュールの出力	$\boldsymbol{\xi_p};\boldsymbol{\theta}(\cup_i(\boldsymbol{\alpha}_i^\sharp;\boldsymbol{\beta}_i))$

まとめ

Mamdani 方式のファジィ制御は（「非ファジィ化」の部分を除くと）ファジィ関係の基本的な演算である.

入力	$\boldsymbol{p}$
ファジィ化の結果	$\boldsymbol{\xi_p;\theta}$
決定モジュールの出力	$\boldsymbol{\xi_p;\theta}(\cup_i(\boldsymbol{\alpha_i^\sharp;\beta_i}))$

ファジィ化： $\boldsymbol{\xi_-;\theta}$
決定化モジュール： $\cup_i(\boldsymbol{\alpha_i^\sharp;\beta_i})$