関係とその基数

河原 康雄

平成 22 年 8 月 31 日

鹿児島大学・数理情報科学談話会

関係理論

集合 A から集合 B への (2 項) 関係 $\alpha : A \rightharpoondown B$ とは、直積集合 $A \times B$ の部分集合である。即ち

$$\alpha \subseteq A \times B.$$

部分集合 $\alpha \subseteq A \times B$ は、その特性関数

$$c_\alpha : A \times B \to \{0, 1\}$$

と対応する。従って、関係は (2 変数) 述語 と見なすことも出来る。

♠ 同値関係・順序関係

X, Y を集合とする。

- $0_{XY} = \emptyset$: Empty relation 空関係
- $\nabla_{XY} = X \times Y$: Universal relation 全関係
- $\mathrm{id}_X : X \rightharpoondown X$: Identity relation 恒等関係

$$\mathrm{id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

- $\ni_X : \wp(X) \rightharpoondown X$: Membership relation 所属関係

$$\ni_X = \{(S, x) \mid S \subseteq X \text{ and } S \ni x\}$$

$\alpha, \alpha' : X \rightharpoonup Y$, $\beta : Y \rightharpoonup Z$ を関係とする。

- 論理演算

$$(x,y) \in \alpha \sqcap \alpha' \leftrightarrow (x,y) \in \alpha \wedge (x,y) \in \alpha' \quad \text{(交関係)}$$
$$(x,y) \in \alpha \sqcup \alpha' \leftrightarrow (x,y) \in \alpha \vee (x,y) \in \alpha' \quad \text{(和関係)}$$
$$(x,y) \in \alpha^{-} \leftrightarrow (x,y) \notin \alpha \quad \text{(補関係)}$$

- 逆関係 $\alpha^\sharp : Y \rightharpoonup X$

$$(y,x) \in \alpha^\sharp \leftrightarrow (x,y) \in \alpha$$

- 合成 $\alpha\beta : X \rightharpoonup Z$

$$(x,z) \in \alpha\beta \leftrightarrow \exists y \in Y.\ [(x,y) \in \alpha \wedge (y,z) \in \beta]$$

- 剰余合成 $\alpha \odot \beta : X \rightharpoonup Z$

$$(x,z) \in \alpha \odot \beta \leftrightarrow \forall y \in Y.\ [(x,y) \in \alpha \to (y,z) \in \beta]$$

♠ $\alpha \odot \beta = (\alpha\beta^{-})^{-}$

集合間の関係全体 Rel は 圏 をなし、次を満たす。

D1. 射集合 $Rel(X,Y)$ は 完備ブール代数 である。

$$(Rel(X,Y), \sqcap, \sqcup, \bar{\ }, 0_{XY}, \nabla_{XY})$$

D2. $(\alpha^\sharp)^\sharp = \alpha, \quad (\alpha\beta)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp, \quad \alpha \sqsubseteq \alpha' \to \alpha^\sharp \sqsubseteq \alpha'^\sharp$

D3. Dedekind 公式 $\quad \alpha\beta \sqcap \gamma \sqsubseteq \alpha(\beta \sqcap \alpha^\sharp\gamma)$

D4. 剰余合成 $\quad \gamma \sqsubseteq \alpha \odot \beta \leftrightarrow \alpha^\sharp\gamma \sqsubseteq \beta$

結合律 $\quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad$ 単位律 $\quad \mathrm{id}_X\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_Y = \alpha,$

分配律 $\quad \alpha(\sqcup\beta_i) = \sqcup\alpha\beta_i,$

単調性 $\quad \alpha \sqsubseteq \alpha', \beta \sqsubseteq \beta' \to \alpha\beta \sqsubseteq \alpha'\beta', \quad$ 零律 $\quad \alpha 0 = 0.$

関係 $f : X \rightharpoonup Y$ に対して

- *univalent* 一価　($f^\sharp f \sqsubseteq \mathrm{id}_Y$)
- *total* 全域　($\mathrm{id}_X \sqsubseteq f f^\sharp$)
- 関数　(一価かつ全域)　関数は $f : X \to Y$ と表記
- 全射　($f^\sharp f = \mathrm{id}_Y$, $\mathrm{id}_X \sqsubseteq f f^\sharp$)
- 単射　($f^\sharp f \sqsubseteq \mathrm{id}_Y$, $\mathrm{id}_X = f f^\sharp$)
- *matching* (or 部分全単射)　($f^\sharp f \sqsubseteq \mathrm{id}_Y$, $f f^\sharp \sqsubseteq \mathrm{id}_X$)
- *total matching* (or 単射)　($f^\sharp f \sqsubseteq \mathrm{id}_Y$, $f f^\sharp = \mathrm{id}_X$)

- Schröder 同値
  $\alpha\beta \sqsubseteq \gamma \leftrightarrow \alpha^\sharp\gamma^- \sqsubseteq \beta^- \leftrightarrow \gamma^-\beta^\sharp \sqsubseteq \alpha^-$
- Tarski 規則 $\alpha \neq 0_{XY} \rightarrow \nabla_{XX}\alpha\nabla_{YY} = \nabla_{XY}$
- 有理性 (Tabulation) $\forall \alpha : X \rightharpoonup Y\ \exists$ function $f : R \to X,\ g : R \to Y.\ \alpha = f^\sharp g \ \wedge\ ff^\sharp \sqcap gg^\sharp = \mathrm{id}_R.$
- 所属関係
  $\forall \alpha : X \rightharpoonup Y\ \exists !$ function $f : X \to \wp(Y).\ \alpha = f\ni_Y.$

♠ 有理性 $\rightarrow$ 関係は関数の分数である。

関係 $\alpha, \beta : X \rightharpoonup Y$ に対して

α が全域, β が一価かつ $\alpha \sqsubseteq \beta$ ならば、$\alpha = \beta$ である。

[要素毎の証明]

$$\begin{array}{llll}
(x,y) \in \beta & \rightarrow & \exists y' \in Y.\ (x,y') \in \alpha & \{\ \alpha : \text{全域}\ \} \\
& \rightarrow & (x,y') \in \beta & \{\ \alpha \sqsubseteq \beta\ \} \\
& \rightarrow & y = y' & \{\ \beta : \text{一価}\ \} \\
& \rightarrow & (x,y) \in \alpha. & \{\ (x,y') \in \alpha\ \}
\end{array}$$

[関係論的証明]

$$\begin{array}{llll}
\beta & \sqsubseteq & \alpha\alpha^\sharp\beta & \{\ \mathsf{id}_X \sqsubseteq \alpha\alpha^\sharp\ \} \\
& \sqsubseteq & \alpha\beta^\sharp\beta & \{\ \alpha \sqsubseteq \beta\ \} \\
& \sqsubseteq & \alpha. & \{\ \beta^\sharp\beta \sqsubseteq \mathsf{id}_Y\ \}
\end{array}$$

1 点対象 I から対象 X への 関数 $x : I \to X$ を X の 点 と呼び、記号 $x \in X$ により表す。

[点公理]

- (PA1) $\forall$ 集合 X. $\sqcup_{x \in X} x = \nabla_{IX}$

  (or $\sqcup_{x \in X} x^\sharp x = \mathrm{id}_X$)

- (PA2) $\forall$ 関係 $\rho : I \rightharpoonup X$. $\rho = \sqcup_{x \in \rho} x$.

♡ 1 点対象 I は

$$\nabla_{II} = \mathrm{id}_I \neq 0_{II} \ \wedge \ \forall \text{集合 } X.\ \nabla_{XX} = \nabla_{XI}\nabla_{IX}$$

によって特徴付けられる。

関係理論の歴史

- De Morgan, Dedekind, Peirce, Schröder (19 世紀後半)
- Tarski : 関係の代数的定式化 (1941) $\cdots$ 関係代数
- Mac Lane : 加法関係 (1961) $\cdots$ ホモロジー代数
- Zadeh : Fuzzy 集合 (1965) $\cdots$ 多値関係
- Freyd and Scedrov : Allegory (1990) $\cdots$ 関係圏

Maddux, The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calucus of relations, Studia Logica **50** (1991).

Schmidt and Ströhlein, Relations and graphs, (1993).

Schmidt, Relational Mathematics, (2010).

関係理論には主に次のような見方がある。

- ブール代数 + 演算 $\cdots$ (代数)

  $\wp(X)$: ブール代数, $\wp(X \times X)$: 関係代数

- 述語 $\cdots$ (論理)

  関係代数の恒等式 $\cdots$ 高々4 変数で証明可能な論理式

- 多価関数 $\cdots$ (圏論)

  allegory + 所属関係 $\cong$ トポスの関係圏

- ブール値行列 $\cdots$ (グラフ理論)

数学の Schröder 化

- 関係集合論
  Cantor の定理・Bernstein の定理
  選択公理と Zorn の補題の同値性
- 群論・束論・位相空間論などの基礎
  Tarski の不動点定理
  ブール代数に関する Stone の表現定理
  位相空間に関する Urysohn の定理

計算機科学への応用

- オートマトン理論
- プログラムの意味論・アルゴリズム解析
- グラフ変換
- データベース・形式概念解析

関係の基数

関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ は直積集合 $X \times Y$ の部分集合であるので、集合としての 基数 $|\alpha|$ をもつ。

以下では、有限集合 の間の関係に限定する。

♡ グラフの隣接関係の 基数 は、(有向) 辺の個数を表す。

(a) $|\alpha| = 0 \;\leftrightarrow\; \alpha = 0_{XY}$,

(b) $|\alpha \sqcup \alpha'| = |\alpha| + |\alpha'| - |\alpha \sqcap \alpha'|$
$(\alpha \sqsubseteq \alpha' \;\rightarrow\; |\alpha| \leq |\alpha'|)$,

(c) $|\alpha^\sharp| = |\alpha|, \quad |\mathrm{id}_I| = 1$,

(d) $\alpha^\sharp\alpha \sqcap \beta\beta^\sharp \sqsubseteq \mathrm{id}_Y$ ならば Dedekind 不等式

$$|\beta \sqcap \alpha^\sharp\gamma| \leq |\alpha\beta \sqcap \gamma|.$$

♣ 条件 (a) - (d) を満たす関数の系 $|\cdot| : Rel(X,Y) \rightarrow N$ は唯一つである。

Dedekind 不等式からの結果

関係 $\alpha : X \rightarrow Y$, $\beta : Y \rightharpoondown Z$, $\gamma : X \rightharpoondown Z$ に対して

(a) α, β が一価ならば、$|\alpha\beta \sqcap \gamma| = |\alpha \sqcap \gamma\beta^\sharp|$,

(b) α が matching ならば、$|\alpha\beta \sqcap \gamma| = |\beta \sqcap \alpha^\sharp\gamma|$,

(c) α が一価かつ β が関数ならば、$|\alpha\beta| = |\alpha|$,

(d) α が matching ならば、$|\alpha^\sharp\alpha\beta| = |\alpha\beta|$.

- $f : X \rightarrow Y$ が matching ならば $|\nabla_{IX} f| = |f|$.
  特に $|\nabla_{IX}| = |\mathrm{id}_X|$.

関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ に対して、次が成り立つ。

(a) $|\alpha| = \sum_{x\in X} |x\alpha|$, (b) $|\alpha| = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} |x\alpha y^\sharp|$.

(証明) (a)

$$\begin{aligned}|\alpha| &= |\sqcup_{x\in X}\, x^\sharp x\alpha| && \{\ \mathrm{id}_X = \sqcup_{x\in X} x^\sharp x \text{ 点公理 } \}\\ &= \textstyle\sum_{x\in X} |x^\sharp x\alpha| && \{\ x^\sharp x\alpha \sqcap x'^\sharp x'\alpha = 0_{XX} \text{ if } x \neq x' \ \}\\ &= \textstyle\sum_{x\in X} |x\alpha|. && \{\ x \in X \text{ は matching } \}\end{aligned}$$

(b) $|x\alpha| = |\alpha^\sharp x^\sharp| = \sum_{y\in Y} |y\alpha^\sharp x^\sharp| = \sum_{y\in Y} |x\alpha y^\sharp|$.

$\heartsuit$ $x\alpha y^\sharp = \mathrm{id}_I \ \leftrightarrow\ (x,y) \in \alpha$.

関係 $\alpha : X \rightharpoondown Y$ に対して、matching $f : X \rightharpoondown Y$ が $f \sqsubseteq \alpha$ を満たすならば

$$\forall \text{関係 } \rho : I \rightharpoondown X.\ |f| \leq |\nabla_{IX}| - (|\rho| - |\rho\alpha|).$$

(証明) Dedekind 公式から $\rho \sqcap \nabla_{IX} f f^\sharp = \rho f f^\sharp$ である。よって

$$\begin{aligned} |\nabla_{IX}| &\geq |\rho \sqcup \nabla_{IX} f f^\sharp| \\ &= |\rho| + |\nabla_{IX} f f^\sharp| - |\rho \sqcap \nabla_{IX} f f^\sharp| \\ &= |\rho| + |\nabla_{IX} f| - |\rho f| \\ &= |\rho| + |f| - |\rho f| \\ &\geq |\rho| + |f| - |\rho\alpha|. \qquad \{\ f \sqsubseteq \alpha\ \} \end{aligned}$$

$\square$

Hall の定理

関係 $\alpha : X \rightharpoondown Y$ に対して

$$\exists\ \text{単射}\ f : X \to Y.\ f \sqsubseteq \alpha \ \leftrightarrow\ \forall \rho : I \rightharpoondown X.\ |\rho| \le |\rho\alpha|.$$

(証明) $(\rightarrow)$ f が $f \sqsubseteq \alpha$ を満たす単射とすると

$$\begin{array}{rcll} |\rho| & = & |\rho f f^\sharp| & \{\ f f^\sharp = \mathrm{id}_X\ \} \\ & = & |\rho f| & \{\ f : \text{matching}\ \} \\ & \le & |\rho\alpha|. & \{\ f \sqsubseteq \alpha\ \} \end{array}$$

$(\leftarrow)$ 帰納法による. (Network Flow による別証)

ファジイ関係

ファジイ関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ とは、関数 (写像)

$$\alpha : X \times Y \to [0,1] \qquad ([0,1] : \text{単位区間})$$

空関係 $0_{XY}(x,y) = 0$, 全関係 $\nabla_{XY}(x,y) = 1$
恒等関係 $\mathrm{id}_X(x,x') = [\![x = x']\!]$.

単位区間 $[0,1]$ 上の演算:

$$a \vee b = \max\{a,b\}, \quad a \wedge b = \min\{a,b\},$$

$$a \Rightarrow b = \begin{cases} 1 & (a \le b) \\ b & (\text{その他}). \end{cases} \qquad \text{(Gödel の含意)}$$

$$a \oplus b = \min\{1, a+b\} \qquad (\text{限定和})$$

$$a \ominus b = \max\{0, a-b\} \qquad (\text{限定差})$$

♠ 単位区間 $[0,1]$ は完備 Heyting 代数である。

ファジイ関係 $\alpha, \alpha' : X \rightharpoonup Y$, $\beta : Y \rightharpoonup Z$ に対して

- $\alpha \sqsubseteq \alpha' \leftrightarrow \forall x \in X. \forall y \in Y.\ \alpha(x,y) \le \alpha'(x,y)$
- $(\alpha \sqcup \alpha')(x,y) = \alpha(x,y) \vee \alpha'(x,y)$ (交関係)
  $(\alpha \sqcap \alpha')(x,y) = \alpha(x,y) \wedge \alpha'(x,y)$ (和関係)
  $(\alpha \Rightarrow \alpha')(x,y) = \alpha(x,y) \Rightarrow \alpha'(x,y)$ (含意)
  $(\alpha \oplus \alpha')(x,y) = \alpha(x,y) \oplus \alpha'(x,y)$ (限定和)
  $(\alpha \ominus \alpha')(x,y) = \alpha(x,y) \ominus \alpha'(x,y)$ (限定差)
  $[k \cdot \alpha](x,y) = k\alpha(x,y) \quad (0 \le k \le 1)$ (スカラー積)
- $\alpha^\sharp(y,x) = \alpha(x,y)$ (逆関係)
- $(\alpha\beta)(x,z) = \vee_{y \in Y}[\alpha(x,y) \wedge \beta(y,z)]$ (合成)
- $(\alpha \odot \beta)(x,z) = \wedge_{y \in Y}[\alpha(x,y) \Rightarrow \beta(y,z)]$ (剰余合成)

集合間のファジイ関係全体 FRel は Dedekind 圏をなす。

D1. 射集合 $\mathsf{FRel}(X, Y)$ は 完備 Heyting 代数である。

$$(\mathsf{FRel}(X, Y), \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0_{XY}, \nabla_{XY})$$

D2. $(\alpha^\sharp)^\sharp = \alpha, \quad (\alpha\beta)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp, \quad \alpha \sqsubseteq \alpha' \to \alpha^\sharp \sqsubseteq \alpha'^\sharp$

D3. Dedekind 公式 $\quad \alpha\beta \sqcap \gamma \sqsubseteq \alpha(\beta \sqcap \alpha^\sharp\gamma)$

D4. 剰余合成 $\quad \gamma \sqsubseteq \alpha \odot \beta \leftrightarrow \alpha^\sharp\gamma \sqsubseteq \beta$

結合律 $\quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad$ 単位律 $\quad \mathrm{id}_X\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_Y = \alpha,$

分配律 $\quad \alpha(\sqcup\beta_i) = \sqcup\alpha\beta_i,$

単調性 $\quad \alpha \sqsubseteq \alpha', \beta \sqsubseteq \beta' \to \alpha\beta \sqsubseteq \alpha'\beta', \quad$ 零律 $\quad \alpha\, 0 = 0.$

X, Y を有限集合とする。ファジイ関係 $\alpha : X \rightharpoonup Y$ の基数 $|\ \alpha\ |$ は

$$|\alpha| = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \alpha(x, y)$$

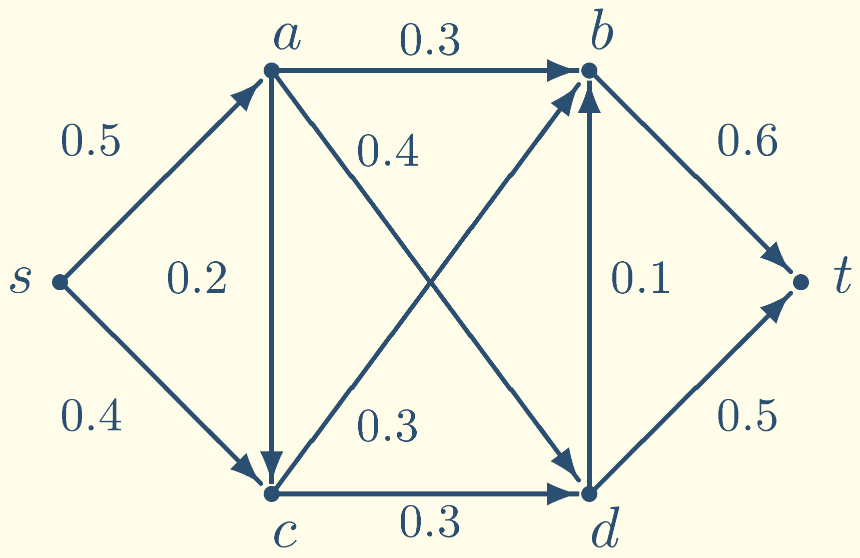
により定義する。

(a) $|\alpha| = 0 \ \leftrightarrow \ \alpha = 0_{XY}$,
(b) $|\alpha \sqcup \alpha'| = |\alpha| + |\alpha'| - |\alpha \sqcap \alpha'|$
$(\alpha \sqsubseteq \alpha' \ \rightarrow \ |\alpha| \leq |\alpha'|)$
(c) $|\alpha^\sharp| = |\alpha|, \quad |\mathrm{id}_I| = 1$
(d) $|k \cdot \alpha| = k|\alpha| \quad (0 \leq k \leq 1)$
(e) (Dedekind 不等式) α が一価ならば

$$|\beta \sqcap \alpha^\sharp \gamma| \leq |\alpha\beta \sqcap \gamma|, \quad |\alpha \sqcap \gamma\beta^\sharp| \leq |\alpha\beta \sqcap \gamma|.$$

Netwok Flows

網枠 $N = (\alpha : X \rightharpoondown X, s, t)$ は $\alpha \sqcap \alpha^\sharp = 0_{XX}$ を満たすファジイ関係 $\alpha : X \rightharpoondown X$ と 2 つの異なる点 $s, t \in X$ の組である。

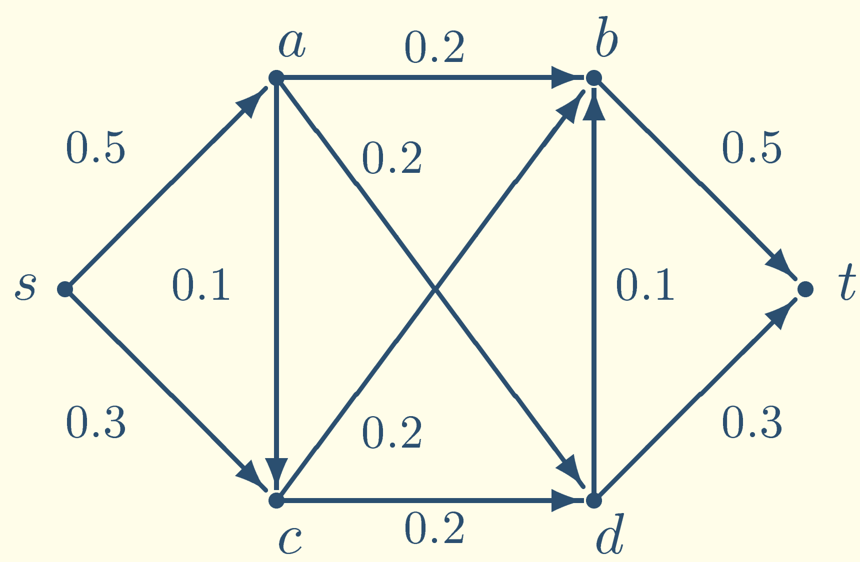


$N = (\alpha : X \rightharpoondown X, s, t)$ を網枠とする。$(\hat{s} = s^\sharp s)$

ファジイ関係 $\varphi : X \rightharpoondown X$ が

$$\varphi \sqsubseteq \alpha \ \wedge\ \forall \text{ブール関係 } u \sqsubseteq (\hat{s} \sqcup \hat{t})^- \sqcap \mathrm{id}_X.\ |u\varphi| = |\varphi u|$$

を満たすとき、**網枠 N の網流** と呼ぶ。



網流の流量

網枠 $N = (\alpha : X \rightharpoonup X, s, t)$ の網流 φ に対して

$$|\hat{s}\varphi| - |\varphi\hat{s}| = |\varphi\hat{t}| - |\hat{t}\varphi| \ (= val(\varphi) \quad \text{網流の流量}).$$

(証明) $u = (\hat{s} \sqcup \hat{t})^{-} \sqcap \mathrm{id}_X$ とおくと $\hat{s} \sqcup \hat{t} \sqcup u = \mathrm{id}_X$ であり

$$\begin{aligned} |\varphi| &= |(\hat{s} \sqcup \hat{t} \sqcup u)\varphi| \\ &= |\hat{s}\varphi| + |\hat{t}\varphi| + |u\varphi|. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} |\varphi| &= |\varphi(\hat{s} \sqcup \hat{t} \sqcup u)| \\ &= |\varphi\hat{s}| + |\varphi\hat{t}| + |\varphi u|. \end{aligned}$$

従って、$|u\varphi| = |\varphi u|$ から $|\hat{s}\varphi| + |\hat{t}\varphi| = |\varphi\hat{s}| + |\varphi\hat{t}|$ が成り立つ。$\square$

網枠 $N = (\alpha : X \rightharpoonup X, s, t)$ に対して

- 網流 φ が **最大** $\leftrightarrow$ $\forall$ 網流 $\psi.\ val(\psi) \leq val(\varphi)$.
- ブール関係 $v \sqsubseteq \mathsf{id}_X$ が 切断 $\leftrightarrow$ $\hat{s} \sqsubseteq v \sqsubseteq \hat{t}^-$.
- 切断 v が **最小** $\leftrightarrow$ $\forall$ **切断** $w.\ |v\alpha v^c| \leq |w\alpha w^c|$.

$$(v^c = v^- \sqcap \mathsf{id}_X)$$

$\heartsuit$ X が有限なので、切断も有限個である。よって、最小切断が存在する。

網枠 $N = (\alpha : X \rightharpoonup X, s, t)$ の網流 $\varphi : X \rightharpoonup X$ に対して

$$\varphi_\alpha = (\alpha \ominus \varphi) \sqcup \varphi^\sharp, \quad \varphi_\alpha^* = \sqcup_{n\geq 0} (\varphi_\alpha)^n$$

とおく。次の 3 つの命題は同値である。

(a) $\varphi : X \rightharpoonup X$ は最大網流,

(b) $\hat{s}\varphi_\alpha^*\hat{t} = 0_{XX}$ (or $|\hat{s}\varphi_\alpha^*\hat{t}| = 0$),

(c) $\exists$(最小) 切断 v. $val(\varphi) = |v\alpha v^c|$.

♡ 上の定理から Hall の定理が示される。

- 関係理論の概要
- 関係の基数とその応用 $\cdots$ ファジイ関係・Network Flow

関係 $\alpha : \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ を

$$(x, y) \in \alpha \leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

によって定義する。(α は単位円板 $\cdots$ 面積 $|\alpha| = \pi$)

$$\begin{aligned} (x, z) \in \alpha\alpha &\leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}.\ x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y^2 + z^2 \leq 1 \\ &\leftrightarrow x^2 \leq 1 \wedge z^2 \leq 1. \end{aligned}$$

($\alpha\alpha$ は原点を中心とする 1 辺の長さ 2 の正方形 $\cdots$ 面積 $|\alpha\alpha| = 4$)