群上のセルオートマトン

鈴木敬太

3 月 17 日（火）@数理情報科学さくらセミナー２０１５

発表の流れ

Tullio Ceccherini-Silberstein,Michel Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer 2010

発表の流れ

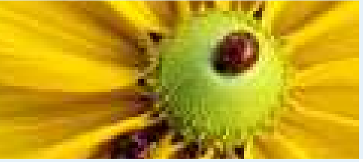
Tullio Ceccherini-Silberstein,Michel Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer 2010

- セルオートマトンの具体例

発表の流れ

Tullio Ceccherini-Silberstein,Michel Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer 2010

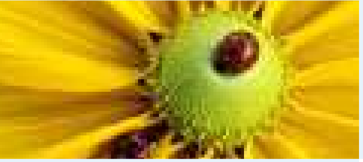
- セルオートマトンの具体例
- 群上のセルオートマトンの定義と具体例の考察



発表の流れ

Tullio Ceccherini-Silberstein,Michel Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer 2010

- セルオートマトンの具体例
- 群上のセルオートマトンの定義と具体例の考察
- 群上のセルオートマトンの特徴付け



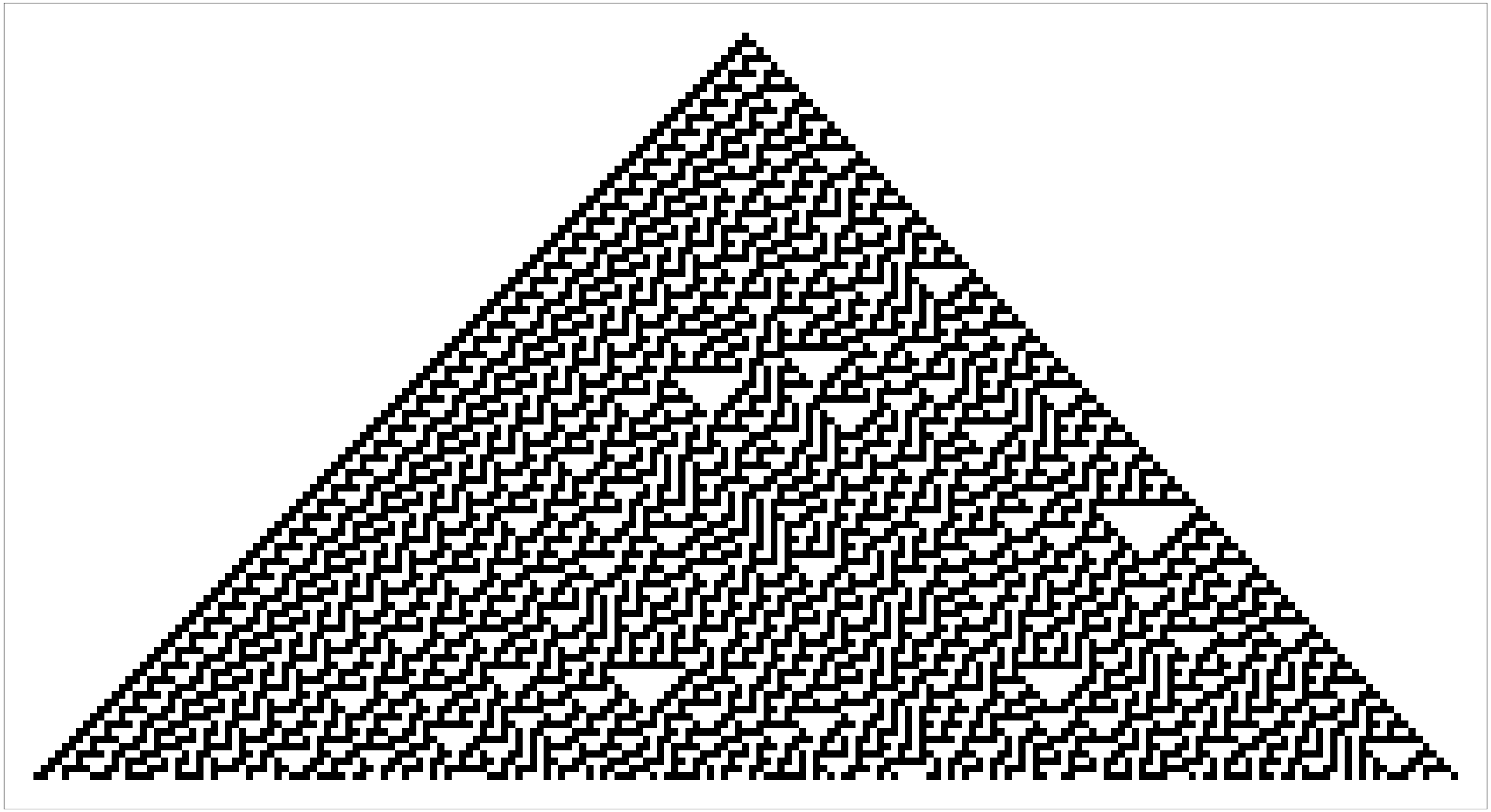
発表の流れ

Tullio Ceccherini-Silberstein,Michel Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer 2010

- セルオートマトンの具体例
- 群上のセルオートマトンの定義と具体例の考察
- 群上のセルオートマトンの特徴付け
- まとめ

セルオートマトンの具体例

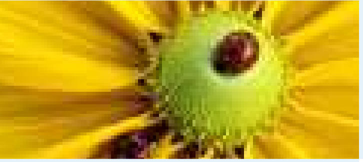
セルオートマトンの具体例



セルオートマトンの具体例

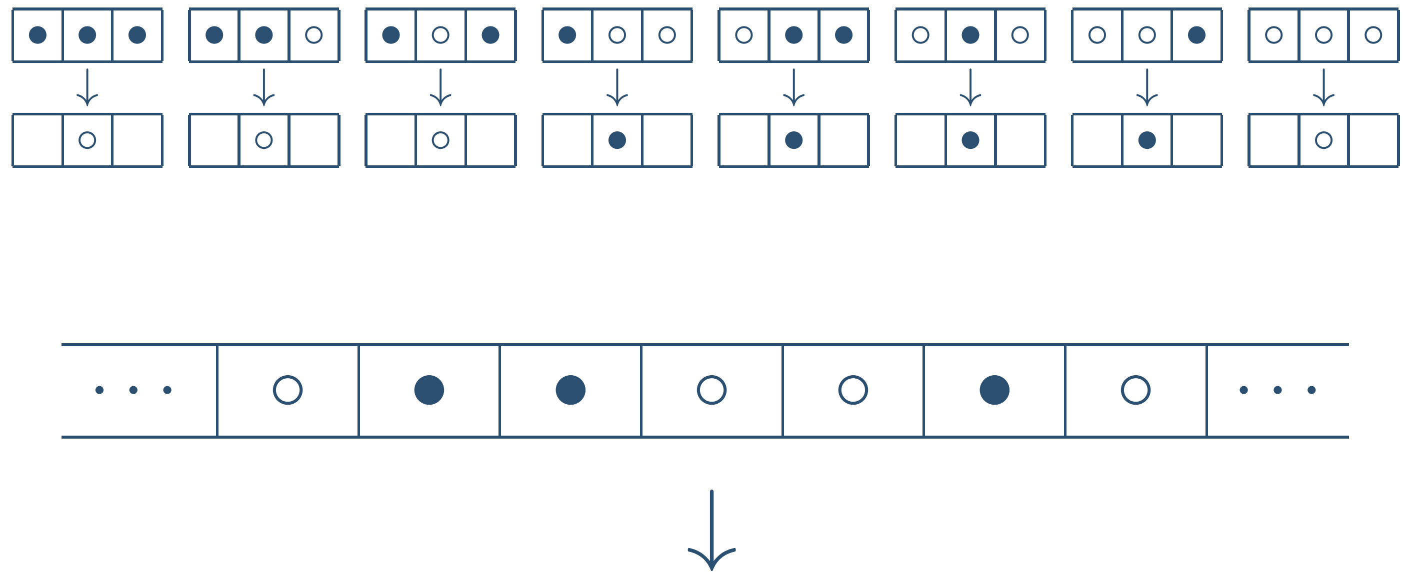
- ルール 30

●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
○	○	○	●	●	●	●	○



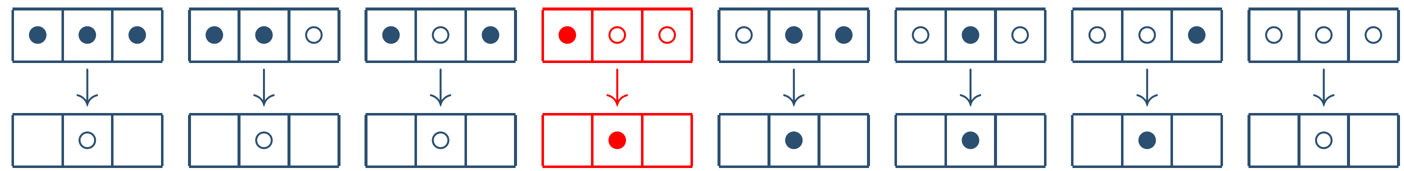
セルオートマトンの具体例

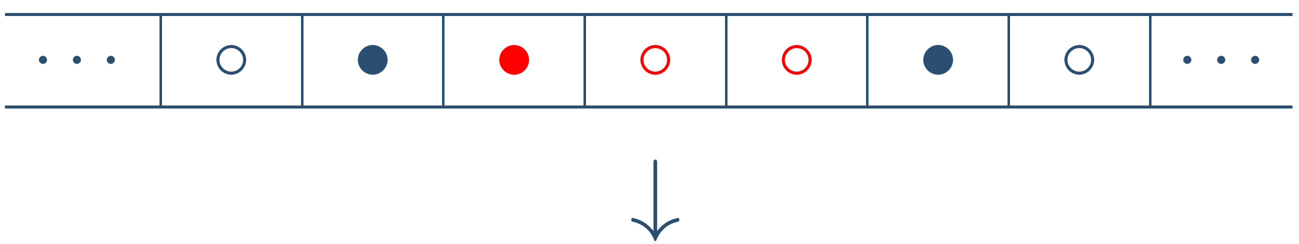
- ルール 30



セルオートマトンの具体例

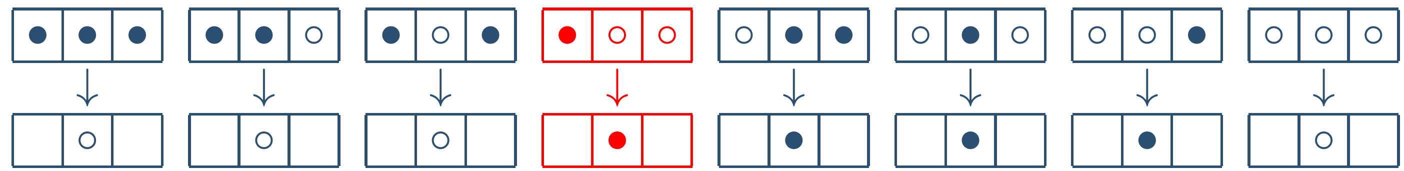
- ルール 30

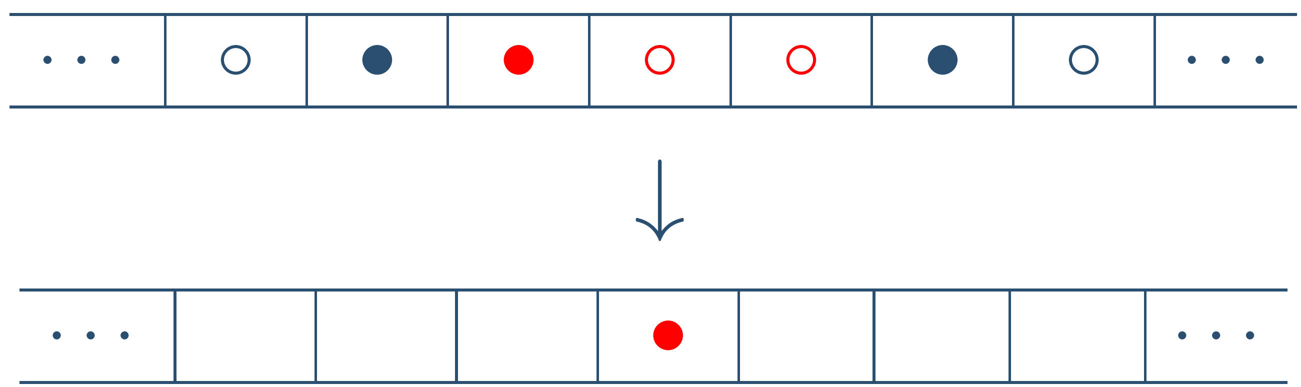




セルオートマトンの具体例

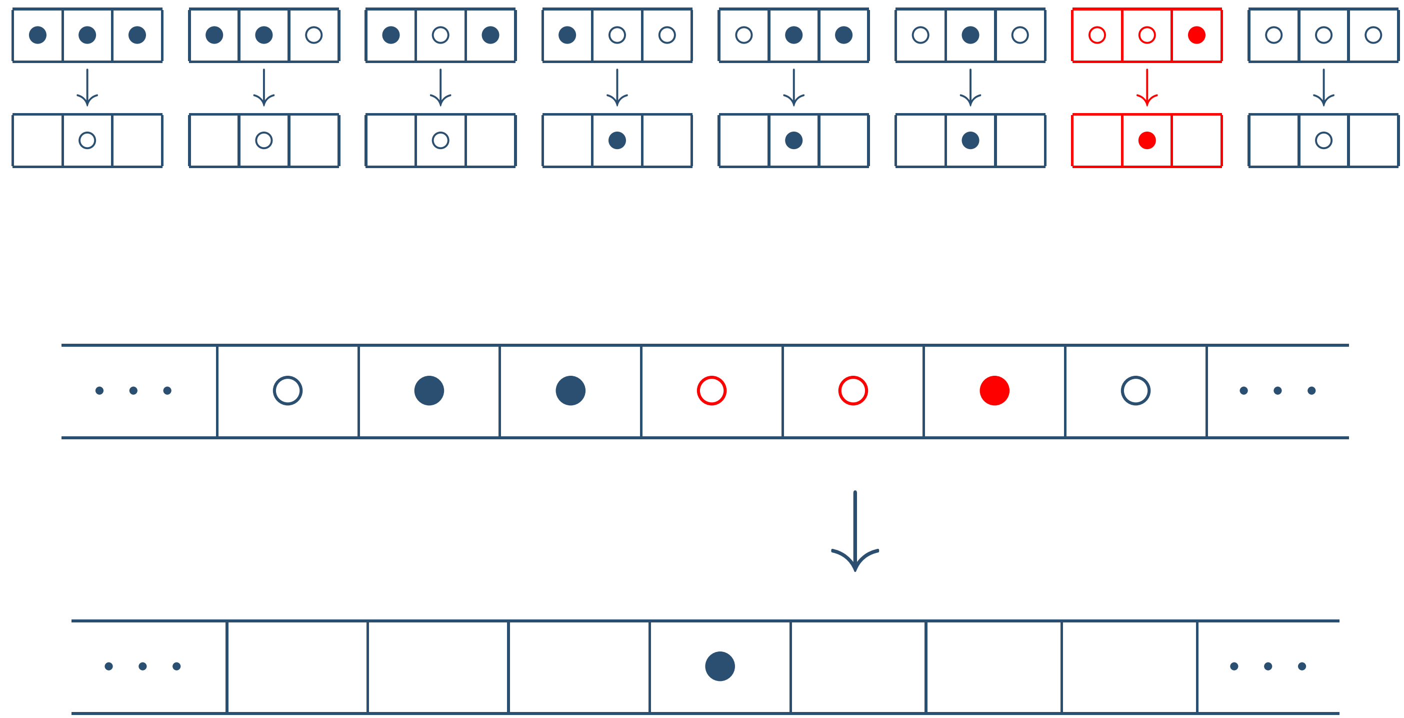
- ルール 30





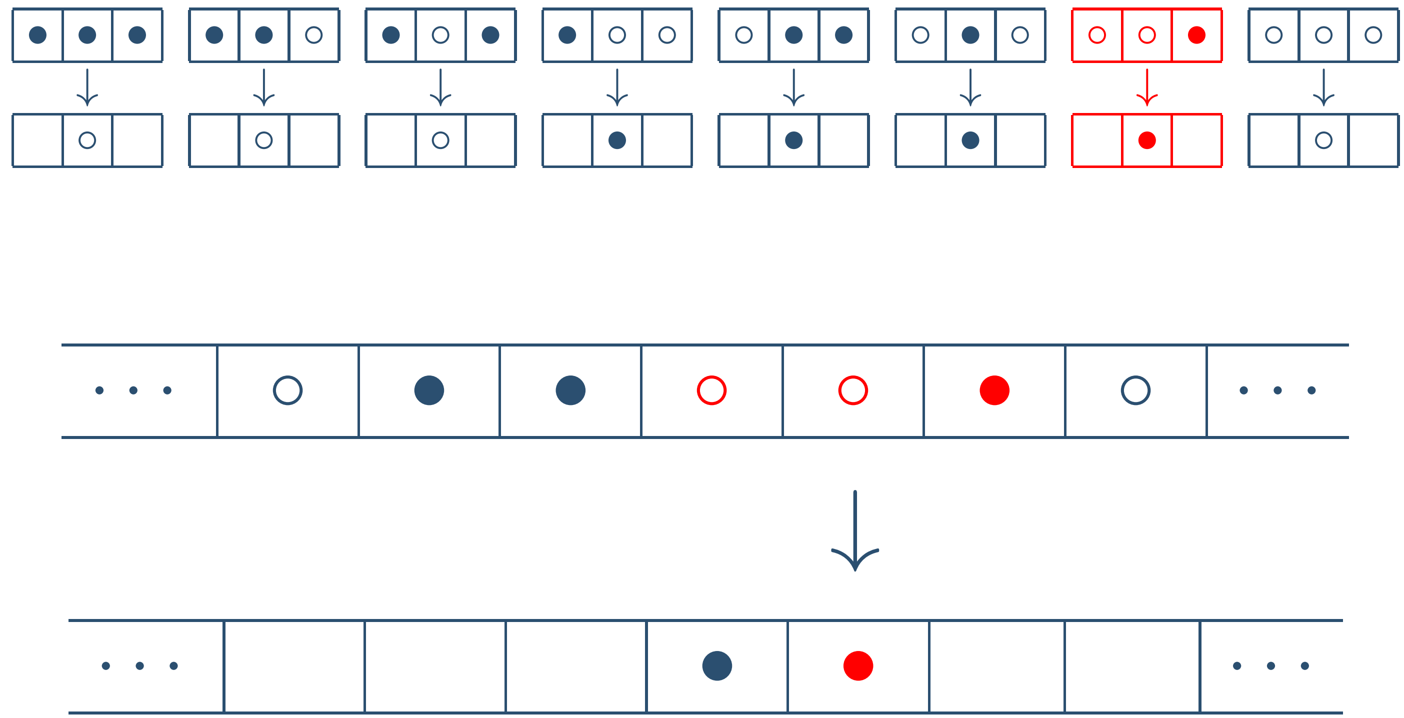
セルオートマトンの具体例

■ ルール 30



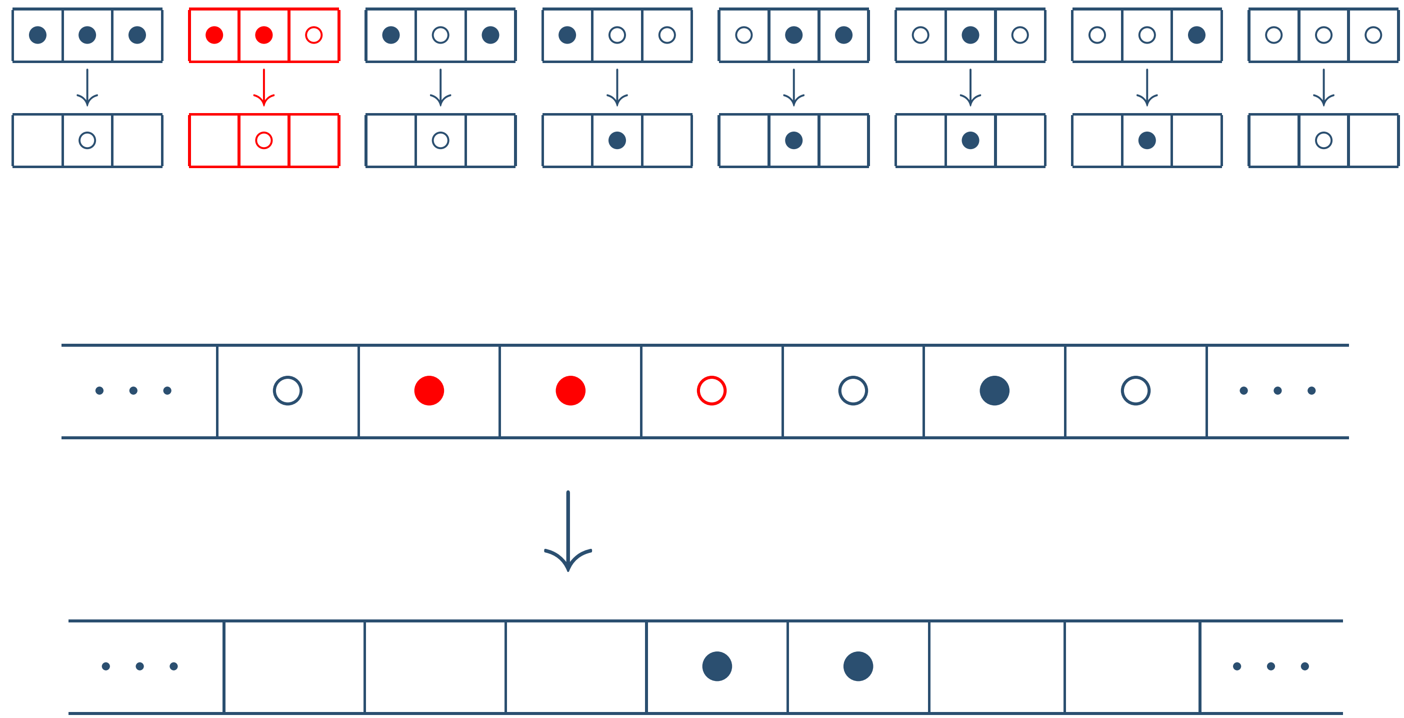
セルオートマトンの具体例

- ルール30



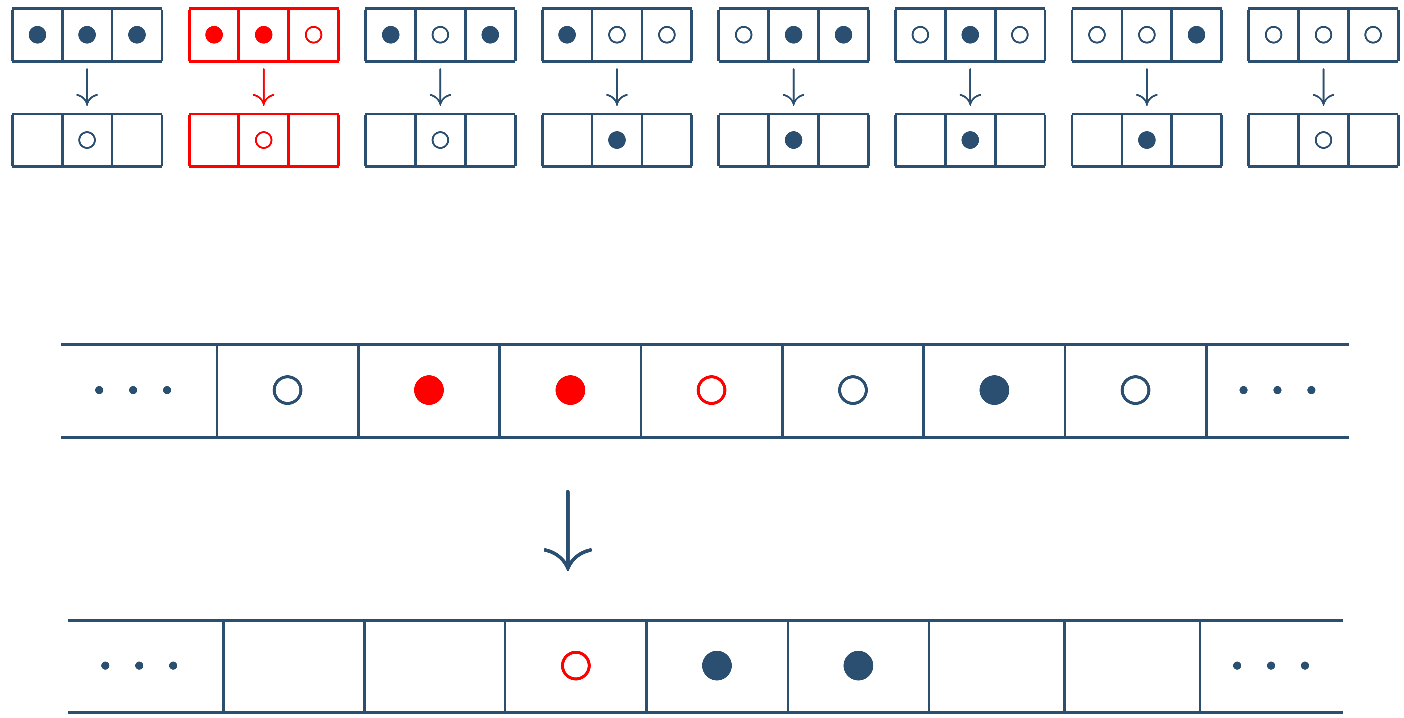
セルオートマトンの具体例

- ルール 30



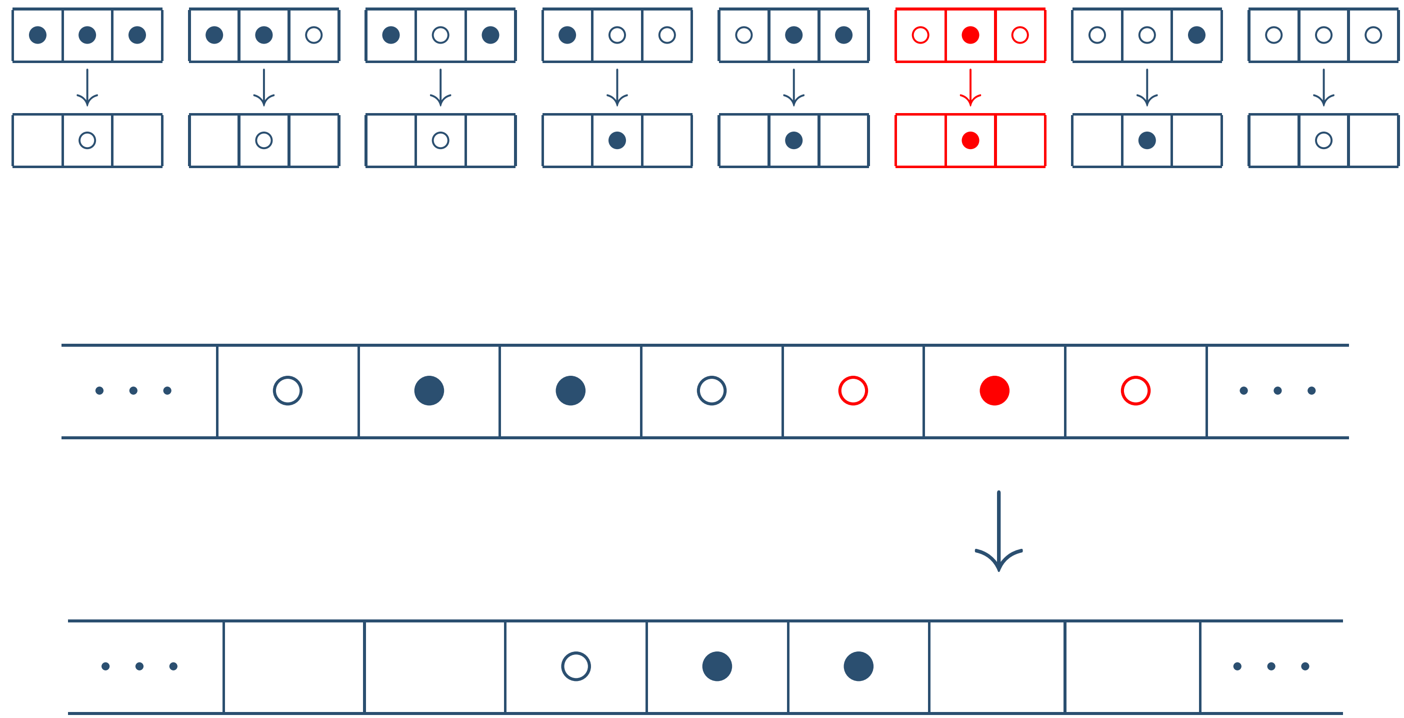
セルオートマトンの具体例

- ルール 30



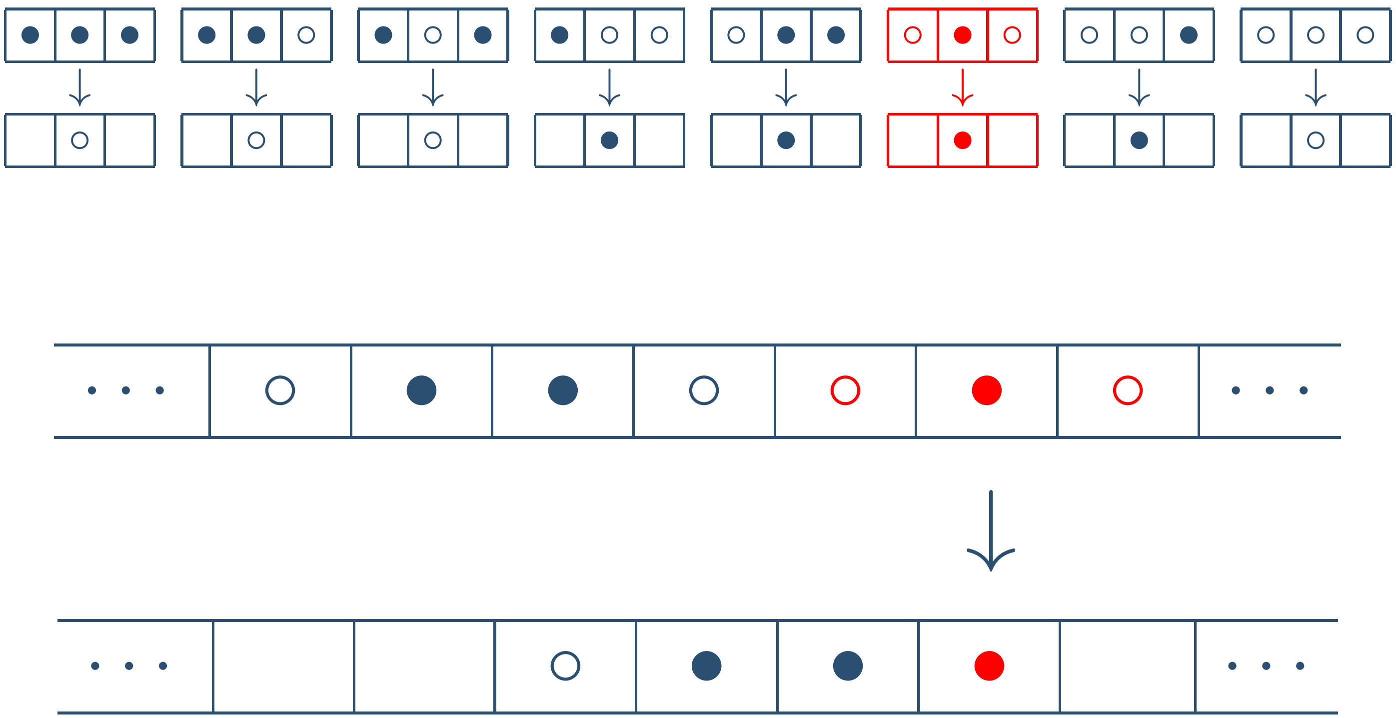
セルオートマトンの具体例

■ ルール 30



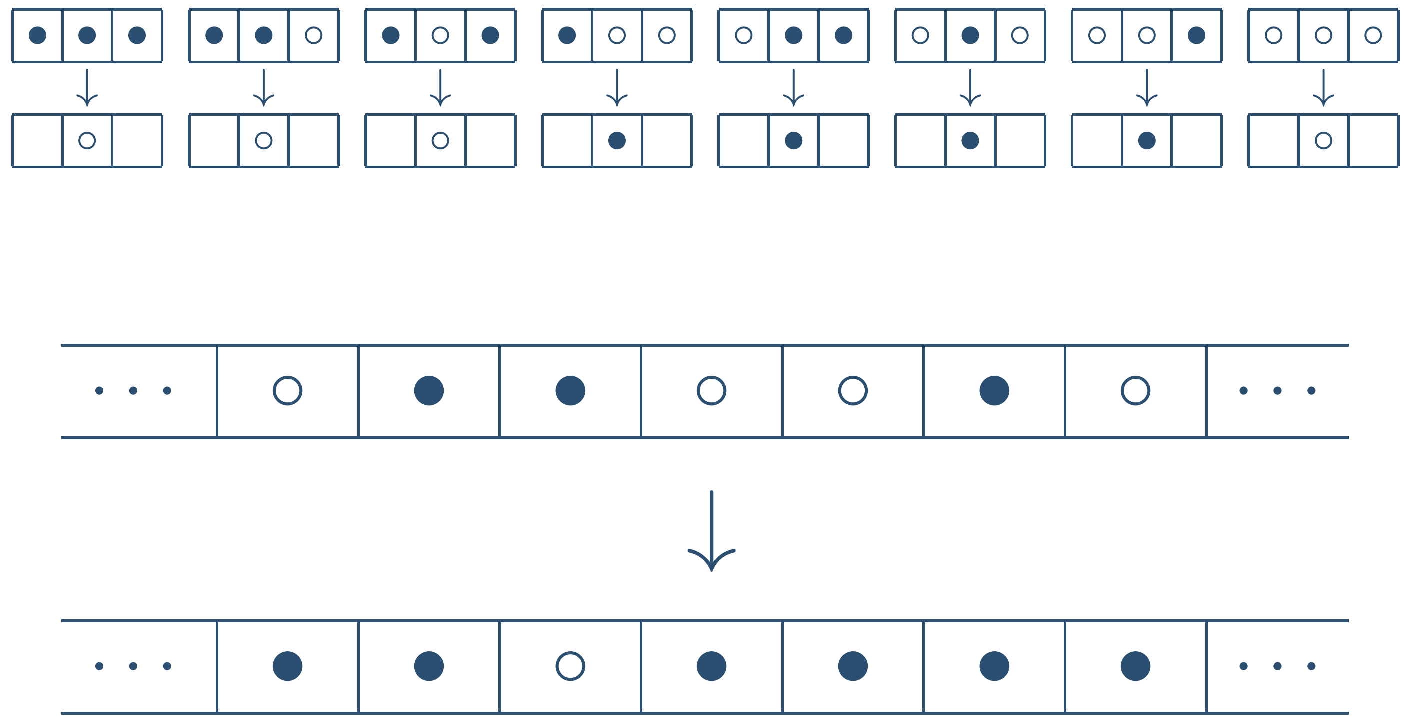
セルオートマトンの具体例

■ ルール 30



セルオートマトンの具体例

- ルール 30



セルオートマトンの具体例

- ルール 30

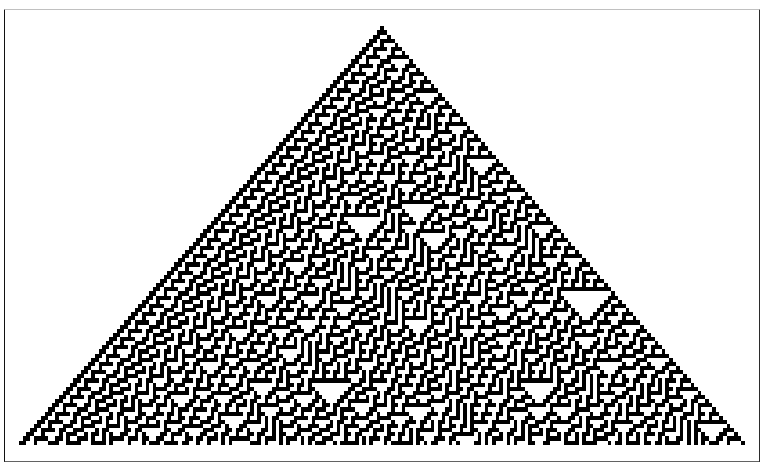
●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
○	○	○	●	●	●	●	○

-

⋯	○	○	●	○	○	⋯

を初期様相として 100 ステップ進める．

- 実行例



群上のセルオートマトンの定義と具体例の考察

群上のセルオートマトンの定義

G: 群, A: 集合,
$A^G = \prod_{g\in G} A \; (= \{x\colon G \to A\})$

群上のセルオートマトンの定義

G: 群, A: 集合,
$A^G = \prod_{g \in G} A \ (= \{x \colon G \to A\})$

$\tau \colon A^G \to A^G$は
群 G とアルファベット A 上の
セルオートマトン

群上のセルオートマトンの定義

G: 群, A: 集合,
$A^G = \prod_{g \in G} A \ (= \{x \colon G \to A\})$

$\tau \colon A^G \to A^G$は
群 G とアルファベット A 上の
セルオートマトン

$\overset{def}{\iff}$ $\exists S \subseteq_f G, \quad \exists \mu \colon A^S \to A,$
$\forall x \in A^G, \ \forall g \in G. \ \tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)$

群上のセルオートマトンの定義

G: 群, A: 集合,
$A^G = \prod_{g \in G} A \ (= \{x \colon G \to A\})$

$\tau \colon A^G \to A^G$は
群 G とアルファベット A 上の
セルオートマトン

$\overset{def}{\iff}$ $\exists S \subseteq_f G, \quad \exists \mu \colon A^S \to A,$
$\forall x \in A^G, \ \forall g \in G. \ \tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)$

群上のセルオートマトンの定義

G: 群,　A: 集合,
$A^G = \prod_{g \in G} A \ (= \{x\colon G \to A\})$

$\tau\colon A^G \to A^G$ は
群 G とアルファベット A 上の
セルオートマトン

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists S \subseteq_f G, \quad \exists \mu\colon A^S \to A,$$
$$\forall x \in A^G, \ \forall g \in G. \ \tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)$$

$$\begin{array}{cccc} g^{-1}x\colon & G & \longrightarrow & A \\ & \Psi & & \Psi \\ & h & \longmapsto & x(gh) \end{array}$$

群上のセルオートマトンの定義

$G\colon$ 群， $A\colon$ 集合，
$A^G = \prod_{g\in G} A \; (= \{x\colon G \to A\})$

$\tau\colon A^G \to A^G$は
群 G とアルファベット A 上の
セルオートマトン

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists S \subseteq_f G, \quad \exists \mu\colon A^S \to A,$$
$$\forall x \in A^G, \; \forall g \in G. \; \tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)$$

$$\begin{array}{cccc} g^{-1}x\colon & G & \longrightarrow & A \\ & \Cup & & \Cup \\ & h & \longmapsto & x(gh) \end{array}$$

$(g^{-1}x)|_S$ は
$(g^{-1}x)$ の S への制限

ルール 30

ルール 30

$$G = \mathbb{Z},\quad A = \{\circ, \bullet\},\quad S = \{-1, 0, 1\},$$

$$\mu\colon A^S \to A$$

-1	0	1		-1	0	1
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	

発表の流れ
セルオートマトンの具体例
群上のセルオートマトンの定義と具体例の考察
群上のセルオートマトンの定義
群上のセルオートマトンの特徴付け
まとめ

ルール 30

$$G = \mathbb{Z}, \quad A = \{\circ, \bullet\}, \quad S = \{-1, 0, 1\},$$

$$\mu \colon A^S \to A$$

$$
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \circ & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \bullet & \bullet & \circ \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \circ & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \bullet & \circ & \bullet \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \circ & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \bullet & \circ & \circ \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \bullet & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \circ & \bullet & \bullet \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \bullet & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \circ & \bullet & \circ \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \bullet & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \circ & \circ & \bullet \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \bullet & \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \circ & \circ & \circ \\ \hline & \downarrow & \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline & \circ & \\ \hline \end{array}
$$

$$
x\colon \quad
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
\cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \hline
\cdots & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \circ & \cdots \\ \hline
\end{array}
$$

ルール 30

$$G = \mathbb{Z}, \quad A = \{\circ, \bullet\}, \quad S = \{-1, 0, 1\},$$
$$\mu \colon A^S \to A$$

-1	0	1		μ
●	●	●	↓	○
●	●	○	↓	○
●	○	●	↓	○
●	○	○	↓	●
○	●	●	↓	●
○	●	○	↓	●
○	○	●	↓	●
○	○	○	↓	○

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x:$	$\cdots$	○	●	●	○	○	●	○	$\cdots$
	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$-0x:$	$\cdots$	○	●	●	○	○	●	○	$\cdots$

$$\tau(x)(0) = \mu((-0x)|_S) \quad \downarrow$$

ルール 30

$$G = \mathbb{Z}, \quad A = \{\circ, \bullet\}, \quad S = \{-1, 0, 1\},$$

$$\mu \colon A^S \to A$$

-1	0	1	$\to$	0
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$	$\circ$
$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$	$\circ$
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$	$\circ$
$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$	$\circ$

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x:$	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$
	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$-0x:$	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$$\tau(x)(0) = \mu((-0x)|_S)$$

ルール 30

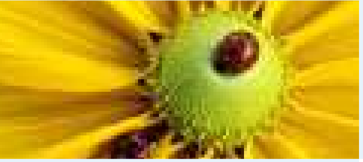
$$G = \mathbb{Z}, \quad A = \{\circ, \bullet\}, \quad S = \{-1, 0, 1\},$$
$$\mu\colon A^S \to A$$

-1	0	1		μ at 0
●	●	●	↓	○
●	●	○	↓	○
●	○	●	↓	○
●	○	○	↓	●
○	●	●	↓	●
○	●	○	↓	●
○	○	●	↓	●
○	○	○	↓	○

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x:	$\cdots$	○	●	●	○	○	●	○	$\cdots$
$-0x$:	$\cdots$	○	●	●	○	○	●	○	$\cdots$

$$\tau(x)(0) = \mu((-0x)|_S) \quad \downarrow$$

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$\tau(x)$:	$\cdots$				●				$\cdots$



ルール 30

$$G = \mathbb{Z},\quad A = \{\circ, \bullet\},\quad S = \{-1, 0, 1\},$$

$$\mu \colon A^S \to A$$

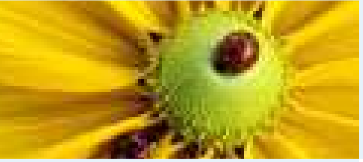
-1	0	1		-1	0	1
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x:	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$-1x$:	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$$\tau(x)(1) = \mu((-1x)|_S) \quad \downarrow$$

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$\tau(x)$:	$\cdots$				$\bullet$				$\cdots$



ルール 30

$$G=\mathbb{Z},\quad A=\{\circ,\bullet\},\quad S=\{-1,0,1\},$$
$$\mu\colon A^S\to A$$

-1	0	1		-1	0	1
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x\colon$	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$-1x\colon$	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$$\tau(x)(1)=\mu((-1x)|_S)\quad\downarrow$$

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$\tau(x)\colon$	$\cdots$				$\bullet$	$\bullet$			$\cdots$

ルール 30

$$G=\mathbb{Z},\quad A=\{\circ,\bullet\},\quad S=\{-1,0,1\},$$
$$\mu\colon A^S\to A$$

−1	0	1	→	−1	0	1
●	●	●	↓		○	
●	●	○	↓		○	
●	○	●	↓		○	
●	○	○	↓		●	
○	●	●	↓		●	
○	●	○	↓		●	
○	○	●	↓		●	
○	○	○	↓		○	

x:

⋯	−3	−2	−1	0	1	2	3	⋯
⋯	○	●	●	○	○	●	○	⋯

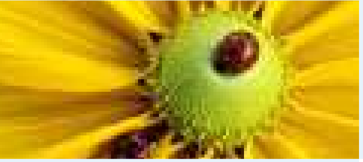
$1x$:

⋯	−2	−1	0	1	2	3	4	⋯
⋯	○	●	●	○	○	●	○	⋯

$$\tau(x)(-1)=\mu((1x)|_S)\quad\downarrow$$

$\tau(x)$:

⋯	−3	−2	−1	0	1	2	3	⋯
⋯				●	●			⋯



ルール 30

$$G = \mathbb{Z},\quad A = \{\circ, \bullet\},\quad S = \{-1, 0, 1\},$$

$$\mu \colon A^S \to A$$

-1	0	1	$\to$	-1	0	1
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\circ$	
$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$		$\bullet$	
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$		$\circ$	

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x\colon$	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$
	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$1x\colon$	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$$\tau(x)(-1) = \mu((1x)|_S) \quad \downarrow$$

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$\tau(x)\colon$	$\cdots$			$\circ$	$\bullet$	$\bullet$			$\cdots$

ルール 30

$G = \mathbb{Z}, \quad A = \{\circ, \bullet\}, \quad S = \{-1, 0, 1\},$

$\mu \colon A^S \to A$

-1	0	1	$\to$	0
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$	$\circ$
$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$	$\circ$
$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$	$\circ$
$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\downarrow$	$\bullet$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\downarrow$	$\circ$

x:	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$
$-2x$:	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$	$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$$\tau(x)(2) = \mu((-2x)|_S) \quad \downarrow$$

$\tau(x)$:	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
	$\cdots$			$\circ$	$\bullet$	$\bullet$			$\cdots$

ルール 30

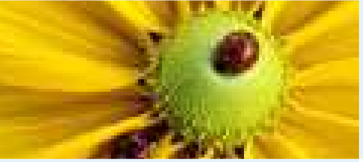
$$G = \mathbb{Z}, \quad A = \{\circ, \bullet\}, \quad S = \{-1, 0, 1\},$$
$$\mu \colon A^S \to A$$

-1	0	1		-1	0	1
●	●	●	$\downarrow$		○	
●	●	○	$\downarrow$		○	
●	○	●	$\downarrow$		○	
●	○	○	$\downarrow$		●	
○	●	●	$\downarrow$		●	
○	●	○	$\downarrow$		●	
○	○	●	$\downarrow$		●	
○	○	○	$\downarrow$		○	

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x\colon$	$\cdots$	○	●	●	○	○	●	○	$\cdots$
	$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	$\cdots$
$-2x\colon$	$\cdots$	○	●	●	○	○	●	○	$\cdots$

$$\tau(x)(2) = \mu((-2x)|_S) \quad \downarrow$$

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$\tau(x)\colon$	$\cdots$			○	●	●	●		$\cdots$



ルール 30

$$G=\mathbb{Z},\quad A=\{\circ,\bullet\},\quad S=\{-1,0,1\},$$
$$\mu\colon A^S\to A$$

$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$
● ● ●	● ● ○	● ○ ●	● ○ ○	○ ● ●	○ ● ○	○ ○ ●	○ ○ ○
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$-1\ 0\ 1$
○	○	○	●	●	●	●	○

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x:$	$\cdots$	○	●	●	○	○	●	○	$\cdots$

$$\tau\ \downarrow$$

	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$\tau(x):$	$\cdots$	●	●	○	●	●	●	●	$\cdots$

群上のセルオートマトンの特徴付け

本章の目標

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$

命題

$\Longleftrightarrow$

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

$\Leftrightarrow$

定理

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- τは連続

本章の目標

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

$$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$$

命題

$\Longleftrightarrow$

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

$\Leftrightarrow$

定理

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- τは連続

本章の目標

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

$$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$$

命題

$\Longleftrightarrow$

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

$\Updownarrow$

定理

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- τは連続

本章の目標

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

$$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$$

命題

$\Longleftrightarrow$

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

$\Leftrightarrow$

定理

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- τは連続

A: 集合, G: 群, $\tau\colon A^G \to A^G$: 写像
$S \subseteq_f G$, $\mu\colon A^S \to A$

命題

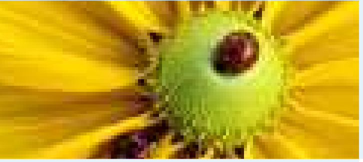
命題

A: 集合，G: 群，$\tau\colon A^G \to A^G$: 写像

$S \subseteq_f G$，$\mu\colon A^S \to A$

命題

τが S とμとともにセルオートマトンをなす



命題

A: 集合, G: 群, $\tau \colon A^G \to A^G$: 写像
$S \subseteq_f G$, $\mu \colon A^S \to A$

命題

τが S とμとともにセルオートマトンをなす

$\Longleftrightarrow$
- $\forall g \in G, \forall x \in A^G. \ \tau(gx) = g\tau(x)$
- $\forall x \in A^G. \ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

命題

A: 集合, G: 群, $\tau\colon A^G \to A^G$: 写像
$S \subseteq_f G$, $\mu\colon A^S \to A$

命題

τが S とμとともにセルオートマトンをなす

$\iff$

- $\forall g \in G,\ \forall x \in A^G.\ \tau(gx) = g\tau(x)$
- $\forall x \in A^G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

(
定義
$\exists S \subseteq_f G, \quad \exists \mu\colon A^S \to A,$
$\quad \forall x \in A^G, \quad \forall g \in G. \quad \tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)$
)

セルオートマトンにならない例 (1)

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

$\not\Leftarrow$

$$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$$

× $\tau(gx) = g\tau(x)$

• $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

セルオートマトンにならない例 (1)

$$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \tau\colon A^G \to A^G.$$

$$\forall x \in A^G,\ \forall n \in G.\ \tau(x)(n) = x(n) + \overline{n}$$

セルオートマトンにならない例 (1)

$$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \tau \colon A^G \to A^G.$$

$$\forall x \in A^G,\ \forall n \in G.\ \tau(x)(n) = x(n) + \overline{n}$$

$$\overline{0} = \circ, \quad \overline{1} = \bullet$$

$x:$	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
	$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \tau\colon A^G \to A^G.$$

$$\forall x \in A^G,\ \forall n \in G.\ \tau(x)(n) = x(n) + \overline{n}$$

$$\overline{0} = \circ, \quad \overline{1} = \bullet$$

$x:$

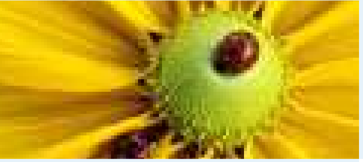
$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$x:$

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$1x:$

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\cdots$



セルオートマトンにならない例 (1)

$$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \tau \colon A^G \to A^G.$$

$$\forall x \in A^G,\ \forall n \in G.\ \tau(x)(n) = x(n) + \overline{n}$$

$$\overline{0} = \circ, \quad \overline{1} = \bullet$$

x:

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

x:

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$\downarrow$

$1\tau(x)$:

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\cdots$

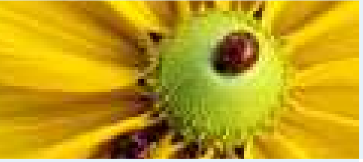
$1x$:

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\cdots$

$\downarrow$

$\tau(1x)$:

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\cdots$



セルオートマトンにならない例 (1)

$$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \tau\colon A^G \to A^G.$$

$$\forall x \in A^G, \ \forall n \in G.\ \tau(x)(n) = x(n) + \overline{n}$$

$$\overline{0} = \circ, \ \overline{1} = \bullet$$

$x:$

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\bullet$	$\circ$	$\cdots$

$\swarrow$ $\searrow$

$1\tau(x):$

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\cdots$

$\tau(1x):$

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
$\cdots$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\cdots$

$$1\tau(x) \neq \tau(1x)$$

セルオートマトンにならない例 (1)

$$A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad G = \mathbb{Z}, \quad \tau\colon A^G \to A^G.$$

$$\forall x \in A^G,\ \forall n \in G.\ \tau(x)(n) = x(n) + \overline{n}$$

$$S = \{0\}, \quad \mu\colon A^S \to A.$$

$$\forall y \in A^S.\ \mu(y) = y(0)$$

$$\Longrightarrow \quad \tau(x)(0) = \mu(x|_S)$$

セルオートマトンにならない例 (2)

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

$$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$$

$\not\Leftarrow$

- $\tau(gx) = g\tau(x)$

$\times$ $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

セルオートマトンにならない例 (2)

G: 有限でない群, $A = G$, $\tau\colon A^G \to A^G$.

$$\forall x \in A^G,\ \forall g \in G.\ \tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$$

$$\Longrightarrow\ \ \tau(gx) = g\tau(x).$$

セルオートマトンにならない例 (2)

G: 有限でない群, $A = G$, $\tau \colon A^G \to A^G$.

$$\forall x \in A^G,\ \forall g \in G.\ \tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$$

$$\Longrightarrow \quad \tau(gx) = g\tau(x).$$

$F \subseteq_f G$, $g \in G \setminus F$, $g_0 \neq 1_G$

$$x_g(h) = \begin{cases} g & h = 0 \\ g_0 & h = g \\ 1_G & \text{その他} \end{cases},\ y_g(h) = \begin{cases} g & h = 0 \\ 1_G & \text{その他} \end{cases}$$

$$\tau(x_g)(1_G) = g_0 \neq 1_G = \tau(y_g)(1_G)$$

$$x_g|_F = y_g|_F \text{ なので}$$

セルオートマトンにならない例 (2)

G: 有限でない群, $A = G$, $\tau \colon A^G \to A^G$.

$$\forall x \in A^G,\ \forall g \in G.\ \tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$$

$$\Longrightarrow \quad \tau(gx) = g\tau(x).$$

$F \subseteq_f G$, $g \in G \setminus F$, $g_0 \neq 1_G$

$$x_g(h) = \begin{cases} g & h = 0 \\ g_0 & h = g \\ 1_G & \text{その他} \end{cases}, \quad y_g(h) = \begin{cases} g & h = 0 \\ 1_G & \text{その他} \end{cases}$$

$$\tau(x_g)(1_G) = g_0 \neq 1_G = \tau(y_g)(1_G)$$

$x_g|_F = y_g|_F$ なので

$$\mu(x_g|_F) = \tau(x_g)(1_G)$$
$$\mu(y_g|_F) = \tau(y_g)(1_G)$$

の両立はありえない

セルオートマトンにならない例 (2)

G: 有限でない群， $A = G$， $\tau\colon A^G \to A^G$.

$$\forall x \in A^G,\ \forall g \in G.\ \tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$$

$$\implies \quad \tau(gx) = g\tau(x).$$

$F \subseteq_f G$， $g \in G \setminus F$， $g_0 \neq 1_G$

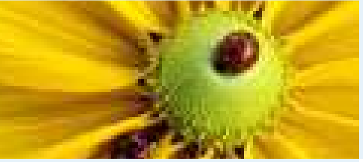
$$x_g(h) = \begin{cases} g & h = 0 \\ g_0 & h = g \\ 1_G & \text{その他} \end{cases},\ y_g(h) = \begin{cases} g & h = 0 \\ 1_G & \text{その他} \end{cases}$$

$$\tau(x_g)(1_G) = g_0 \neq 1_G = \tau(y_g)(1_G)$$

$$x_g|_F = y_g|_F \text{ なので}$$

$$\mu(x_g|_F) = \tau(x_g)(1_G)$$
$$\mu(y_g|_F) = \tau(y_g)(1_G)$$

の両立はありえない



セルオートマトンにならない例 (2)

G: 有限でない群, $A = G$, $\tau\colon A^G \to A^G$.

$$\forall x \in A^G,\ \forall g \in G.\ \tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$$

$$\Longrightarrow \quad \tau(gx) = g\tau(x).$$

$F \subseteq_f G,\ g \in G \setminus F,\ g_0 \neq 1_G$

$$x_g(h) = \begin{cases} g & h = 1_G \\ g_0 & h = g \\ 1_G & \text{その他} \end{cases},\ y_g(h) = \begin{cases} g & h = 1_G \\ 1_G & \text{その他} \end{cases}$$

$$\tau(x_g)(1_G) = g_0 \neq 1_G = \tau(y_g)(1_G)$$

$x_g|_F = y_g|_F$ なので

$$\mu(x_g|_F) = \tau(x_g)(1_G)$$
$$\mu(y_g|_F) = \tau(y_g)(1_G)$$

の両立はありえない

$$\forall S \subseteq_f G.\ \forall \mu\colon A^S \to A.\ \exists x \in A^G.$$
$$\mu(x|_S) \neq \tau(x)(1_G)$$

命題（再考）

A: 集合，G: 群，$\tau\colon A^G \to A^G$

$S \subseteq_f G$，$\mu\colon A^S \to A$

命題

τが S とμとともにセルオートマトンをなす

$\iff$

- $\forall g \in G, \forall x \in A^G.\ \tau(gx) = g\tau(x)$
- $\forall x \in A^G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

命題（再考）

A: 集合, G: 群, $\tau\colon A^G \to A^G$
$S \subseteq_f G$, $\mu\colon A^S \to A$

命題

τが S とμとともにセルオートマトンをなす

$\iff$

- $\forall g \in G,\ \forall x \in A^G.\ \tau(gx) = g\tau(x)$
- $\forall x \in A^G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

Curtis-Hedlund の定理

A: 離散空間，G: 群，A^G: 直積離散空間

$\tau: A^G \to A^G$

Curtis-Hedlundの定理

A：離散空間，G：群，A^G：直積離散空間
$\tau \colon A^G \to A^G$

定理（Curtis-Hedlund の定理）

Curtis-Hedlund の定理

A: 離散空間，G: 群，A^G: 直積離散空間
$\tau\colon A^G \to A^G$

定理（Curtis-Hedlund の定理）

A が有限集合のとき

Curtis-Hedlund の定理

A: 離散空間，G: 群，A^G: 直積離散空間
$\tau\colon A^G \to A^G$

定理（Curtis-Hedlund の定理）

A が有限集合のとき

τがセルオートマトン

Curtis-Hedlund の定理

A: 離散空間, G: 群, A^G: 直積離散空間
$\tau\colon A^G \to A^G$

定理（Curtis-Hedlund の定理）

A が有限集合のとき

τ がセルオートマトン

$\iff$

- $\forall g \in G,\ \forall x \in A^G.\ \tau(gx) = g\tau(x)$
- τ は連続写像

証明の概略

A: 有限集合

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

$$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$$

命題 $\Longleftrightarrow$

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

$\Updownarrow$

$\nwarrow\!\!\searrow$ 定理

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- τは連続

証明の概略

τがセルオートマトン

$$\iff \begin{array}{l} \tau(gx) = g\tau(x) \\ \exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S) \end{array}$$

証明の概略

τがセルオートマトン

$$\iff \begin{array}{c} \tau(gx) = g\tau(x) \\ \underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)} \\ \Uparrow \text{のみを示す.} \end{array}$$

τは連続

τが連続 $\Longrightarrow \exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

証明の概略

τがセルオートマトン

$$\iff \begin{array}{l} \tau(gx) = g\tau(x) \\ \underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)} \end{array}$$

$\Uparrow$ のみを示す.

τは連続

τが連続 $\implies \exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x$ と定めればよい.

証明の概略

τがセルオートマトン

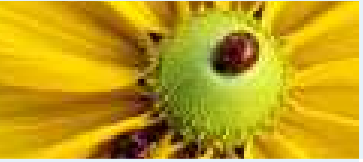
$$\iff \begin{array}{l} \tau(gx) = g\tau(x) \\ \underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)} \end{array}$$

$\Uparrow$ のみを示す.

τは連続

τが連続 $\implies \exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

$$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x$$ と定めればよい.

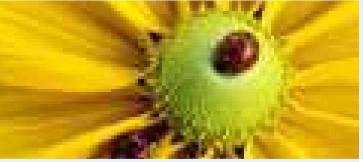


証明の概略

$$\tau \text{がセルオートマトン} \iff \begin{array}{c} \tau(gx) = g\tau(x) \\ \underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)} \\ \Uparrow \text{のみを示す.} \\ \tau\text{は連続} \end{array}$$

τが連続 $\Longrightarrow$ $\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

$$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x \text{と定めればよい.}$$



証明の概略

τがセルオートマトン $\Longleftrightarrow$ $\tau(gx) = g\tau(x)$

$\underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)}$

$\Uparrow$ のみを示す.

τは連続

τが連続 $\Longrightarrow$ $\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

$$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x \text{ と定めればよい.}$$

$\Omega_x \subseteq_f G.\ s.t.$

$\{y \in A^G : y|_{\Omega_x} = x|_{\Omega_x}\} \subseteq (\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\})$

証明の概略

$$\tau \text{がセルオートマトン} \iff \begin{array}{l} \tau(gx) = g\tau(x) \\ \underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)} \end{array}$$

$\Uparrow$ のみを示す.

τは連続

τが連続 $\Longrightarrow \exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

$$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x \text{と定めればよい.}$$

$\Omega_x \subseteq_f G.\ s.t.$

$$\{y \in A^G : y|_{\Omega_x} = x|_{\Omega_x}\} \subseteq \underbrace{(\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\})}_{x\text{の開近傍}}$$

証明の概略

τがセルオートマトン $\Longleftrightarrow$ $\tau(gx) = g\tau(x)$

$\underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)}$

$\Uparrow$ のみを示す.

τは連続

τが連続 $\Longrightarrow$ $\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

$$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x \text{と定めればよい.}$$

$\Omega_x \subseteq_f G.\ s.t.$

$$\{y \in A^G : y|_{\Omega_x} = x|_{\Omega_x}\} \subseteq \underbrace{(\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\})}_{x\text{の開近傍}}$$

補題 $\{\{y \in A^G : y|_T = x|_T\} : T \subseteq_f G\}$

は $x \in A^G$ の基本近傍系

証明の概略

τがセルオートマトン $\Longleftrightarrow$ $\tau(gx) = g\tau(x)$

$\underline{\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)}$

$\Uparrow$ のみを示す.

τは連続

τが連続 $\Longrightarrow$ $\exists S \subseteq_f G.\ \tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ を示すには

$$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x \text{ と定めればよい.}$$

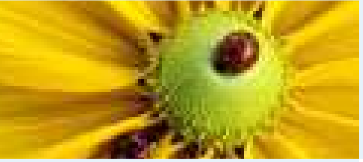
$\Omega_x \subseteq_f G.\ s.t.$

$\{y \in A^G : y|_{\Omega_x} = x|_{\Omega_x}\} \subseteq \underbrace{(\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\})}_{x\text{ の開近傍}}$

$F \subseteq_f A^G.\ s.t.$

$\bigcup_{x \in F}\{y \in A^G : y|_{\Omega_x} = x|_{\Omega_x}\} = A^G$

A^G はコンパクトなので



アルファベット A が無限？

$\tau(gx) = g\tau(x)$ かつ τ は連続写像

$$\not\Downarrow$$

τ はセルオートマトン

アルファベット A が無限？

$\tau(gx) = g\tau(x)$ かつ τ は連続写像

$$\not\Downarrow$$

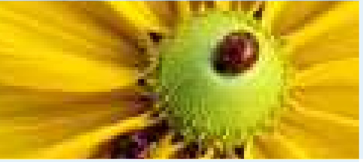
τ はセルオートマトン

G: 有限でない群, $A = G$, $\tau \colon A^G \to A^G$.

$$\forall x \in A^G,\ \forall g \in G.\ \tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$$

（セルオートマトンにならない例（２））

$\Longrightarrow$ $\tau(gx) = g\tau(x)$ かつ τは連続写像



アルファベット A が無限？

$\tau(gx) = g\tau(x)$ かつ τ は連続写像

$$\not\Downarrow$$

τ はセルオートマトン

G: 有限でない群, $A = G$, $\tau \colon A^G \to A^G$.

$$\forall x \in A^G, \forall g \in G.\ \tau(x)(g) = x(g \cdot x(g))$$

（セルオートマトンにならない例（２））

$\Longrightarrow\quad \tau(gx) = g\tau(x)$ かつ τ は連続写像

$$\tau(x)(1_G) \neq \mu(x|_S)$$

本章のまとめ

A: 有限集合

τ: セルオートマトン

$\Updownarrow$ 定義

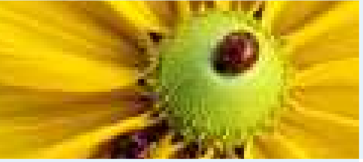
$\boxed{\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)}$ $\overset{\text{命題}}{\Longleftrightarrow}$

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$

$\Updownarrow$ 定理

- $\tau(gx) = g\tau(x)$
- τは連続

まとめ



まとめ・今後の課題

- まとめ
  - 群上のセルオートマトンの定義の紹介
  - 群上のセルオートマトンの大域的な特徴付け（Curtis-Hedlund の定理）

参考文献

Tullio Ceccherini-Silberstein,Michel Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer 2010

まとめ・今後の課題

- まとめ
  - 群上のセルオートマトンの定義の紹介
  - 群上のセルオートマトンの大域的な特徴付け（Curtis-Hedlund の定理）

参考文献

Tullio Ceccherini-Silberstein,Michel Coornaert, Cellular Automata and Groups, Springer 2010

- 今後の課題
  - A が有限でない場合の大域的な特徴付けは可能か
  - 非決定的なセルオートマトンに関する考察