$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 x, y について,（　　）に正しくあてはまるものを下の（イ）〜（ニ）の中からひとつ選び，さらにその命題を証明せよ.

(1) $x = y = 0$ は，$x^2 + xy + y^2 = 0$ が成立するための（　　）.

(2) $x < y$ は，$x^2 < y^2$ が成立するための（　　）.

(3) $x = y$ は，$x^2 + y^2 = 2|xy|$ が成立するための（　　）.

（イ）必要十分条件である.

（ロ）必要条件であるが, 十分条件でない.

（ハ）十分条件であるが, 必要条件でない.

（ニ）必要条件でも十分条件でもない.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a > 1$ とする．極方程式

$$r = \frac{1}{a + \cos\theta}$$

で表される図形 C について, 以下の問いに答えよ.

(1) 図形 C を, 直交座標の x, y の方程式で表せ.

(2) 図形 C を, xy 平面上に図示せよ.

(3) 極方程式 $r = \dfrac{2}{a\sin\theta - \cos\theta}$ で表される図形と図形 C との共有点の個数を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とし, 次の 2 つの関数を考える.

$$f(x) = x^3 - a^2x \ (x \geqq 0), \qquad g(x) = x^2 - ax \ (x \geqq 0)$$

(1) xy 平面上で，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の原点以外の交点をすべて求めよ．また，$f(x) > g(x)$ を満たす x の範囲を, a を用いて表せ.

$0 \leqq x \leqq a$ で $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が囲む部分の面積を $S(a)$ とし，$a \leqq x < 1$ で $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が囲む部分の面積を $T(a)$ とする.

(2) $S(a) - T(a)$ を a を用いて表せ.

(3) $S(a) = T(a)$ となる a を求めよ．さらに, $S(a) - T(a)$ は $0 < a < \dfrac{1}{2}$ で a の増加関数であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\angle\mathrm{C}$ が直角である直角三角形 ABC があり, $\angle\mathrm{A} = \theta$ とおく．点 D は辺 AB 上にあり, $\mathrm{AC} = \mathrm{AD} = 1$ を満たす．また, 点 E は辺 BC 上にあり, $\angle\mathrm{CDE} = \theta$ を満たす.

(1) $\mathrm{CD} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ であることを示せ.

(2) $\angle\mathrm{BCD}$, $\angle\mathrm{CED}$ を θ を用いて表せ.

(3) $\triangle\mathrm{CDE}$ に対して正弦定理を使い, CE を θ を用いて表せ.

(4) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$

xy 平面で 2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 0)$ を考える．初め動く点 P が原点 O にいる．確率 p $(0 < p < 1)$ で表が出るコインを繰り返し投げ，次の規則 (i), (ii) に従って点 P が移動する．n 回コインを投げた後に点 P が移動する点を P_n とおく.

(i) 1 回目にコインを投げたとき, 表が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \overrightarrow{a}$, 裏が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \overrightarrow{b}$ を満たす点 P_1 に移動する.

(ii) $n+1$ 回目にコインを投げたとき, 表が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \overrightarrow{a}$, 裏が出たら $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} + \overrightarrow{b}$ を満たす点 P_{n+1} に移動する.

(1) 5 回コインを投げて表が 3 回，裏が 2 回出たとする．そのとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_5}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ で表せ.

(2) 2 回コインを投げた後，P_2 が y 軸上にある確率を求めよ.

(3) n 回コインを投げた後，P_n が y 軸上にある確率を求めよ.

(4) n 回コインを投げた後，P_n の y 座標の値の期待値を求めよ．必要ならば, 次の式を証明なしに用いてよい．ただし, ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である.

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, k\, p^k (1-p)^{n-k} = np$$