

1 次の各問いに答えよ。

(1)  $(\frac{1}{2})^{20}$  を小数で表したとき、小数第  $k$  位に初めて 0 でない数字が現れる。 $k$  を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.301$  とする。

(2) 平面ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について、 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$  とし、 $\vec{a} + t\vec{b}$  と  $2\vec{a} - t\vec{b}$  は垂直であるとする。実数  $t$  の値を求めよ。

(3)  $n$  を 2 以上の自然数とする。恒等式  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k$  を利用して、等式

$$\sum_{k=1}^n k {}_n C_k = n 2^{n-1}$$

を示せ。ただし、 ${}_n C_k$  は二項係数である。

(4) 複素数平面を考える。 $\alpha = 1 - 3i$  とする。方程式  $|z + 1|^2 = 2|z|^2$  を満たす点  $z$  全体のなす図形を  $C$  とする。 $C$  上の点で、点  $\alpha$  との距離が最小になるものを求めよ。

2 方程式  $x^2 + 2y^2 = 3$  の表す平面上の曲線を  $C$  とする。次の各問いに答えよ。

(1)  $t$  を実数とする。 $C$  上の点  $P(-1, -1)$  を通り傾きが  $t$  の直線を  $L$  とし、 $C$  と  $L$  が異なる 2 点で交わるとする。2 つの交点のうち  $P$  でないほうを  $Q$  とするとき、 $Q$  の座標を  $t$  を用いて表せ。

(2) 正の整数の組  $(l, m, n)$  で、その最大公約数が 1 であり、さらに

$$l^2 + 2m^2 = 3n^2$$

をみたすものを 3 つ答えよ。

3 素数が無限にあることを証明したい。小さい方から数えて  $n$  番目の素数を  $p_n$  と書くことにする。次の各問いに答えよ。

(1)  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$  をそれぞれ求めよ。

(2)  $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + 1$  の素因数はすべて  $p_6$  より大きいことを示せ。

(3) 素数が  $k$  個しかないと仮定して矛盾を導け。ただし、 $k$  は自然数とする。

4  $n$  を 0 以上の整数とし、次の関数を考える。

$$f_n(x) = \frac{\sin\{(2n+1)x\}}{\sin x} \quad (0 < x < \pi)$$

次の各問いに答えよ。

(1) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$  を求めよ。

(2)  $n \geq 1$  とする。次の等式を示せ。

$$f_n(x) - f_{n-1}(x) = 2 \cos(2nx)$$

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f_2(x) dx$$

5 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。次の各問いに答えよ。

(1)  $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$  とおく。  $x > 0$  のとき  $f(x) > 0$  であることを示せ。

(2) (1) の結果を用いて、すべての自然数  $n$  に対して  $a_n > a_{n+1}$  であることを示せ。

(3) すべての自然数  $n$  に対して  $a_n > 0$  であることを示せ。