$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 実数 x, y が $x+y \geqq 2$ を満たすならば, $x \geqq 1$ または $y \geqq 1$ が成り立つことを示せ.

(2) 10 進法で表された数 1000 を n 進法で表すと $1331_{(n)}$ となった. n はいくつか.

(3) $-3 \leqq m \leqq n \leqq 3$ と $\cos\dfrac{m\pi}{6}\cos\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{1}{4}$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) をすべて求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を正の整数とし, 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}\ (x > 0),\ g_n(x) = \dfrac{x^2}{n}\ (x \geqq 0)$ を考える.

(1) xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ と $y = g_n(x)$ の共有点の座標を n を用いて表せ.

(2) $n < m$ のとき, 3 つの曲線 $y = f(x),\ y = g_n(x),\ y = g_m(x)$ で囲まれた部分の面積 $S_{n,m}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_{n,n+1}$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上に三角形 APQ がある. ただし, $\angle$P と $\angle$Q は直角ではないとする. 線分 AP 上に点 A, P 以外の点 B をとり, 線分 AQ 上に点 A, Q 以外の点 C をとる. また, 線分 BQ と線分 CP の交点を D とする.

(1) AB : BP $= a : b$, AC : CQ $= c : d$ のとき, PD : DC を求めよ.

次に, 平面上に点 A, P, Q 以外の点 E をとる. ただし, 線分 AE は直線 PQ と, 点 E 以外の点で垂直に交わるとする. また, 点 B を通って線分 AE に平行な直線と線分 EP の交点を F とし, 点 C を通って線分 AE に平行な直線と線分 EQ の交点を G とする. さらに, 線分 GP と線分 FQ の交点を H とする.

(2) 線分 DH と線分 AE が平行であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 青玉3個と赤玉3個が入った袋がある. 袋から玉をひとつ取り出し, 取り出した玉が青玉なら赤く塗って赤玉にして袋に戻し, 取り出した玉が赤玉ならそのまま袋に戻す. この操作を繰り返し, すべての玉が赤玉になったら操作を終了する. 操作が n 回目で終了する確率を p_n とする. ただし, どの玉が取り出される確率も等しいとする.

(1) p_3 を求めよ.

n 回目の操作が終わった時点で袋の中の青玉の個数が k 個 $(1 \leqq k \leqq 3)$ である確率を $q_n(k)$ とおく.

(2) $q_1(1), q_1(2), q_1(3)$ を求めよ.

(3) $q_n(k)$ $(n \geqq 2,\ k = 1, 2)$ を, $q_{n-1}(k),\ q_{n-1}(k+1)$ を用いて表せ.

(4) $q_2(1), q_2(2), q_2(3)$ を求めよ.

(5) p_4 を求めよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 3辺の長さがすべて整数の直角三角形をピタゴラス三角形という. 次の各問いに答えよ.

(1) ピタゴラス三角形の例を具体的にひとつあげよ.

(2) ピタゴラス三角形の3辺のうち, 少なくとも1辺の長さは偶数である. このことを示せ.

(3) ピタゴラス三角形の3辺のうち, 少なくとも1辺の長さは3の倍数である. このことを示せ.

(4) ピタゴラス三角形の内接円の半径は整数である. このことを示せ.