

1 次の各問いに答えよ。

(1) 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの  $x$  の値を求めよ。

$$y = 3 - 2\sin^2 x + \sin^4 x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

(2) 平面上に三角形 OAB がある。辺 OA の延長線上に点 P を、辺 OB の延長線上に点 Q をとり、線分 PQ の中点を M とする。三角形 OAB の重心 G が直線 OM 上にあるとき辺 AB と線分 PQ は平行であることを証明せよ。

(3)  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$  を因数分解せよ。

(4)  $|1 - a| + |2 - a| + |4 - a|$  を最小にする実数  $a$  の値を求めよ。

2  $a, b$  を実数とする。次の各問いに答えよ。

(1) 2 次方程式

$$x^2 - b = 0$$

の解の絶対値がすべて 1 より小さくなるような  $b$  の値の範囲を求めよ。ただし、2 次方程式の解は複素数の範囲で考えること。

(2) 2 次方程式

$$x^2 - ax - b = 0$$

の解の絶対値がすべて 1 より小さくなるような点  $(a, b)$  全体の表す図形を図示せよ。ただし、2 次方程式の解は複素数の範囲で考えること。

3  $x = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5} + 2)^{\frac{1}{3}}$  をできるだけ簡単に表したい。次の各問いに答えよ。

(1)  $x^3$  を  $x$  の整数係数の 1 次式で表せ。

(2)  $x$  の値を求めよ。

4 次の各問いに答えよ。

(1) 関数  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  は  $x \geq 0$  で単調に増加することを示せ。

(2)  $x \geq 0$  かつ  $y \geq 0$  のとき、次の不等式を示せ。

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \geq \frac{x+y}{1+x+y}$$

(3) 不等式  $|a-b| + |b-c| \geq |a-c|$  を利用して、不等式

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|} \geq \frac{|a-c|}{1+|a-c|}$$

を示せ。

5 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \int_0^1 \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定める。関数  $f(x)$  を  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$  で定め、 $A = f(1)$  とおく。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 等式  $f'(x) = 1 - \{f(x)\}^2$  が成り立つことを示せ。

(2)  $a_2$  を定数  $A$  を用いて表せ。

(3)  $a_1 - a_3$  を定数  $A$  を用いて表せ。

(4)  $a_4 + a_3 - a_1 - a_0$  を定数  $A$  を用いて表せ。