$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 平面上に $\mathrm{CA}=2$, $\mathrm{CB}=3$ の三角形 ABC がある。角 C の二等分線上に点 P をとる。線分 AP は CB と平行であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とおくとき, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 123^{456} の 1 の位（最後の桁）を求めよ。

(3) 次の値を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{3}\left(\sum_{m=1}^{n} m^4\right)$$

(4) p を素数とし, a は p で割り切れない自然数とする。2 つの自然数 m, n について, am を p で割った余りと an を p で割った余りが等しければ, m を p で割った余りと n を p で割った余りが等しいことを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy 平面において, x 軸上の点 $(a, 0)$ を通る直線 l を考える。直線 l は, 点 (b, e^b) において曲線 $y=e^x$ の接線と直交している。このとき次の各問いに答えよ。ただし, $a>0$, $b>0$ とする。

(1) 直線 l の方程式を b をもちいて表せ。

(2) 曲線 $y=e^x$ と直線 l, および x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積が 5 となるとき, a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次のような石取りゲームを考えよう。

いくつかの石があり, 二人が交互に石を取り除いていく。ただし取り除くことのできる石の個数は 1 個か 2 個か 3 個とする。最後の石を取り除いた者を勝ちとする。

次の各問いに答えよ。

(1) 石が 4 つの状態からゲームを始める。このときは, 初めに先手がいくつ石を取り除いても, 後手がうまく対応すれば後手が勝つ。このことを示せ。

(2) 石の個数が 4 の倍数の状態からゲームを始める。このときも (1) と同様に, 後手がかならず勝つことができる。このことを数学的帰納法をもちいて示せ。

$\boxed{\textbf{4}}$ 次の各問いに答えよ。

(1) xy 平面上の直線 $ax+by+c=0$ と原点 $(0,0)$ との距離が

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となることを証明せよ。ただし直線 $ax+by+c=0$ と点 (x_1,y_1) の距離が

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となるという公式は使わずに説明すること。

(2) xy 平面上の直線

$$l_t: \quad 2x\cos t+y\sin t-5=0$$

を考える。t が実数全体を動くとき, 直線 l_t の通過する領域を求め, 図示せよ。

$\boxed{\textbf{5}}$ A 君と B 君がある競技をする。この競技では 1 点ずつ点を取りあう。得点差が 2 になるまで繰り返して, その時点で得点の多い者を勝利者とする。すなわち, 2 対 0, 3 対 1, 4 対 2, $\cdots$ となれば A 君の勝利となり, 0 対 2, 1 対 3, 2 対 4, $\cdots$ となれば B 君の勝利となる。

A 君が得点する確率は p で, B 君が得点する確率は $q=1-p$ であるとする。ただし $0<p<1$ とする。A 君が a 点, B 君が b 点の場面から, A 君が勝利する確率を $P(a,b)$ とおく。

次の各問いに答えよ。

(1) $P(0,0)=P(1,1)$ となることを説明せよ。

(2) まだ勝負がついていないとき, つまり A 君の得点 a と B 君の得点 b の差が 1 以下のとき, $P(a,b)$ を $P(a+1,b)$ と $P(a,b+1)$ をもちいて表せ。

(3) $P(2,0)=1$, $P(0,2)=0$ に注意し, (1) と (2) の結果をもちいて, 0 対 0 の場面から A 君が勝利する確率 $P(0,0)$ を求めよ。