$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) 等式 $\sin\dfrac{1}{x}=0$ と不等式 $\cos\dfrac{1}{x}<0$ をともに満たす x をすべて求めよ.

(2) 1 枚の硬貨を 5 回投げるとき, 表が連続して 3 回以上出る確率 p を求めよ.

(3) 数列 $\{L_n\}$ を, $L_1=1,\ L_2=3,\ L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\ (n=1,2,\cdots)$ と定める. このとき, すべての自然数 n に対して次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

$$\sum_{k=1}^{n} L_k^2 = L_nL_{n+1}-2$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)=\log x,\ g(x)=\log\left(\dfrac{3}{4-x}\right)$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) 曲線 $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(2) 曲線 $y=g(x)$ のグラフをかけ.

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の座標を求めよ.

(4) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上の異なる 4 点 O, A, B, C が

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0},\quad \mathrm{OA}\perp\mathrm{BC},\quad \mathrm{OB}\perp\mathrm{CA}$$

を満たすとき, 三角形 ABC は正三角形であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

を考える. $0 \leqq t \leqq 2$ に対して

$$g(t) = \int_{-1}^{2} f(x)f(t-x)\,dx$$

とおく. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $g\left(\frac{3}{2}\right) = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,f\left(\frac{3}{2} - x\right)dx$ の値を求めよ.

(2) 関数 $g(t)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 成分が実数である 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が次の条件を満たすとき, $A < B$ と書くことにする.

$$a < p, \quad b < q, \quad c < r, \quad d < s$$

このとき, 次の各問いに答えよ. ただし, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $O < A$ のとき, $O < A^2$ であることを示せ.

(2) $O < A$ かつ $A < B$ のとき, $A^2 < B^2$ であることを示せ.

(3) $O < A$ のとき, 次の 2 つの条件

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす正の実数 k と $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が存在することを示せ.