

1 以下の各問いに答えよ.

(1) a を実数とし, x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$$

で定める. $f(x)$ が $x = 1$ で極値をもたないような a の値を求めよ.

(2) 座標平面で次の不等式で表される領域を図示せよ.

$$|x| + |y| \leq 1$$

(3) E は 2 次の単位行列, A は 2 次の正方行列とする. $A, E - A$ がともに逆行列をもたないとき, $A^2 = A$ が成り立つことを示せ.

2 三角形 OAB が与えられている. $0 < s < 1$ とし, 辺 OA を $s : 1 - s$ に内分する点を C , 辺 OB を $s : 1 - s$ に内分する点を D とする. $\triangle ABD$ の重心を E , $\triangle ACD$ の重心を F とするとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおくとき, \vec{OE} および \vec{OF} を s, \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ.

(2) 線分 BC と線分 EF が平行であることを示せ.

(3) 3 点 B, C, E は同一直線上にないことを示せ.

3 正の整数 n と n 以下の正の整数 k に対して整数 ${}_nT_k$ を次のように定める.

$$n \leq 2 \text{ のとき } {}_nT_k = 1 \quad (1 \leq k \leq n \text{ のとき})$$

$$n \geq 3 \text{ のとき } {}_nT_k = \begin{cases} 1 & (k = 1, n \text{ のとき}) \\ {}_{n-1}T_{k-1} + {}_{n-1}T_k & (2 \leq k \leq n-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

さらに, $S_n = \sum_{k=1}^n {}_nT_k$ とする. このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) ${}_5T_3$ を求めよ.

(2) S_{n+1} を S_n を用いて表せ.

(3) S_n を求めよ.

(4) $\sum_{k=1}^n S_k$ を求めよ.

- 4 $t > 0$ とする . 関数 $f(a)$ を

$$f(a) = \int_1^a \frac{1}{x(x+t)} dx \quad (a \geq 1)$$

とおく . 以下の各問いに答えよ .

- (1) $f(a)$ を求めよ .
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = g(t)$ とおくとき , $g(t)$ を求めよ .
- (3) $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ を求めよ .

- 5 四角形 ABCD は $AB = CD = 4$, $AD = BC = 3$ とする長方形であるとする .

以下の各問いに答えよ .

- (1) 点 B から対角線 AC へ下した垂線を BH とする . 線分 AH , BH , CH の長さを求めよ .
- (2) 対角線 AC に関して点 B と対称な点を E とし , 線分 AE と線分 CD の交点を F とする . 点 F から対角線 AC へ下した垂線を FK とする . FK の長さを求めよ .
- (3) 四角形 ABCD を対角線 AC を軸として回転して得られる立体の体積 V を求めよ .