1 以下の各問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ が

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

を満たすように，実数 a, b を定めよ．ただし，$a \fallingdotseq b$ とする．

(2) a, b を実数, x, y を正の実数とするとき, 次の不等式を示せ. また, 等号成立条件を与えよ.

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

(3) A, B 2 人が対戦を繰り返し，先に 3 勝した方が優勝するというルールの競技がある. 一度の対戦で A が勝つ確率を p $(0 < p < 1)$ とする. A が優勝する確率を p を用いて表せ.

2 α, β を正の実数とする. 座標空間上の 3 点 A$(\alpha, 0, 0)$, B$(0, \beta, 0)$, C$(0, 0, 3)$ を考える. $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{b}$ とおく. 次の各問いに答えよ.

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.

(2) $\triangle$ABC の面積 S を α, β を用いて表せ.

(3) α, β が $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を満たしながら動くとき, S の最大値を求めよ.

3 $f(0) = 0$ をみたす 3 次関数 $f(x)$ は $x = a$ で極大値 $4a^3$ をとり，$x = 3a$ で極小値をとるという．このとき次の各問いに答えよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) $f(x)$ を求めて，極小値を求めよ．

(2) 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めて，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標を a で表せ.

(3) 原点と (2) で求めた変曲点を通る直線と，曲線 $y = f(x)$ で囲む二つの図形の面積は等しいことを示せ.

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を，初項 $a_1 = 0, b_1 = -1$ と漸化式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(a_n - b_n) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(a_n + b_n) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_n - b_n) \end{aligned}$$

により定める．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対し，$a_n^2 + b_n^2 = 1$ が成立することを示せ．

(3) $A^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を満たす $\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ．

(4) a_{n+2} および b_{n+2} を，a_n と b_n の式で表せ．

$\boxed{5}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 平均値の定理を用いて, $0 < a < b$ に対して次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}$$

(2) $0 < a < b$ を満たす a, b を固定し，次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \log\left\{(1-x)a + x\,b\right\} - (1-x)\log a - x\log b, \quad x > -\frac{a}{b-a}$$

$f'(x)$ を求め, $f'(0) > 0,\ f'(1) < 0$ が成り立つことを示せ．

(3) $f''(x) < 0$ を示せ．また，$f'(\alpha) = 0$ となる $0 < \alpha < 1$ がただ一つ存在することを示せ．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ において関数 $f(x)$ の増減表をかき, この範囲で $f(x) \geqq 0$ が成り立つことを示せ．