

1 以下の各問いに答えよ .

(1) 次の3つの実数の大小を考察し , 小さい順に並べよ .

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[7]{7}$$

(2) p が5以上の素数ならば , $p^2 - 1$ は24で割り切れることを証明せよ .

(3) サイコロを3回振り , 出た目の数を順に X_1, X_2, X_3 とする . これを並べて十進数で表される数を X とする (例えば , $X_1 = 5, X_2 = 1, X_3 = 6$ のとき $X = 516$ である) . このとき , X の期待値 $E(X)$ を求めよ .

(4) 次の定積分を求めよ .

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x \, dx$$

2 平面上の点 (a, b) から , 曲線 $y = x^3 - 3x$ に相異なる3本の接線が引けるとする . このとき , a, b がみたすべき不等式を求めよ . さらに , その不等式の表す領域を図示せよ .

3 空間の4点を $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3), D(1, 2, -3)$ とする . 以下の各問いに答えよ .

(1) 4つの線分 AD, DB, BC, CA をつないで得られる図形は平行四辺形であることを示し , その面積を求めよ .

(2) 点 C から直線 AB に下ろした垂線を CH とする . 点 H の座標を求めよ .

(3) 三角形 ABC を直線 AB のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ .

4 数列 F_n を

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定める. m, n を任意の自然数とするとき, 以下の各問いに答えよ.

- (1) n に関する数学的帰納法を用いて, $F_{(m+1)+n} = F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1}$ を証明せよ.
- (2) m に関する数学的帰納法を用いて, F_{mn} は F_n で割り切れることを証明せよ.

5 s_1, s_2, \dots, s_n を正の実数とし, a, b, c, d を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} s_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\frac{a}{c} = s_n + \frac{1}{s_{n-1} + \frac{1}{s_{n-2} + \cdots + \frac{1}{s_2 + \frac{1}{s_1}}}}$$

となることを示せ.

例 $n = 4, s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = 4$ の場合は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると, $a = 43, c = 10$ となり,

$$s_4 + \frac{1}{s_3 + \frac{1}{s_2 + \frac{1}{s_1}}} = 4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{43}{10}$$

となる.