

1 次の各問いに答えよ。

(1) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} + \vec{b}| = 5$ のとき, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ を満たす 2 次の正方行列 X をすべて求めよ。

(3) 次の不定積分を求めよ。

$$\int (x^2 + 1) \cos 2x \, dx$$

2 $\triangle ABC$ において, $AB = AC = x, BC = 2$ とする。ただし $x > 1$ である。

(1) $\triangle ABC$ の内接円の面積 S を x で表せ。

(2) $\triangle ABC$ の外接円の面積 T を x で表せ。

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} S, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T}{x^2}$ を求めよ。

3 正の整数 a, b, c が

$$a^2 - 3b^2 = c^2$$

を満たすとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 正の整数 m の 2 乗 m^2 を 4 で割った余りは, 0 または 1 であることを示せ。

(2) a, b のうち少なくとも 1 つは偶数であることを示せ。

(3) a が奇数ならば, b は 4 の倍数であることを示せ。

4 区間 $[-1, 1]$ で定義されたある関数 $f(x)$ に対して関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めたとき, $g(x)$ が次の条件 (a) ~ (c) を満たしたとする。

(a) $g(x)$ はすべての x で微分可能

(b) すべての x について $g(-x) = g(x)$

(c) $\int_{-1}^1 g(x) dx = 1$

このような関数 $f(x)$ の例を1つ作れ。さらに, その例に対して定まる関数 $g(x)$ が (a) ~ (c) を実際に満たすことを説明せよ。

5 ある工場で大量生産される製品には, 確率 p で不良品が含まれる。この製品が良品か不良品かを判定する品質検査では, 確率 q で「不良品を良品である」と誤った判定をしてしまい, また, 確率 r で「良品を不良品である」と誤った判定をしてしまうという。ここで, $0 < p, q, r < 1$ である。

(1) この製品の品質検査で, 不良品と判定される確率を求めよ。

(2) この製品の品質検査で不良品と判定された製品が, 本当に不良品である確率を求めよ。

(3) いま, $p = 0.1, r = 0.01$ であると仮定する。(2) の確率を 0.9 以上にするためには, q はどんな範囲の値でなければならないか求めよ。