

1 次の各問いに答えよ。

(1) $\vec{a} = (0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1)$ とし, 直線 $y = x + 1$ 上の任意の点の位置ベクトルを \vec{u} とするとき, \vec{u} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表わせ。

(2) 辺 BC , CA , AB の長さがそれぞれ a , b , c で, 角 A と角 B がともに鋭角である三角形 ABC において,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

が成り立つことを三平方の定理を用いて証明せよ。

(3) 1組のトランプから3枚のカードを取り出すとき, カードの中にキングのカードが2枚含まれる確率を求めよ。ただし, トランプには計52枚のカードが入っていて, うち4枚がキングである。

(4) 関数 $f(x) = \log_a x$ (ただし, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) に対して, $s > 0$ かつ $t > 0$ とするとき

$$f\left(\frac{s+t}{2}\right) \quad \text{と} \quad \frac{f(s) + f(t)}{2}$$

の大小関係を示せ。

(5) 次の不定積分を計算せよ。ただし, n は整数とする。

$$\int x^n dx$$

2 a を定数とする。 xy 平面上の曲線

$$C_a : y = x^3 + (a-1)x^2 - (a+1)x - 2a$$

について, 次の各問いに答えよ。

(1) 曲線 C_a は, 定数 a の値に無関係に2つの定点 P, Q を通る。2定点の座標を求めよ。

(2) 2定点 P, Q を通る直線と曲線 C_a の共有点が, すべて線分 PQ 上にあるものとする。このとき, a の値のとりうる範囲を求めよ。

(3) (2) で求めた a の範囲で, a が最大値をとるとき, 曲線 C_a と線分 PQ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

3 d を実数, n を自然数とし,

$$\begin{aligned}f_d(1) &= d + d \\f_d(n+1) &= d + f_d(n)\end{aligned}$$

とするとき, 次の各問いに答えよ。

(1) $f_d(2)$ および $f_d(3)$ を求めよ。

(2) $f_d(n)$ を求めよ。ただし, 理由も説明すること。

(3) $a_k = f_k(k)$ (k は自然数) とするとき, 数列 a_1, a_2, a_3, \dots の第 n 項を求めよ。

(4) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。

4 a, b, c を実数とし, $g = ax^2 + 2bxy + cy^2$ とするとき次の各問いに答えよ。

(1) $x = 1, y = 0$ のとき g を求めよ。また, $y = 1$ のとき g を求めよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とするとき, $(x, y) \neq (0, 0)$ を満たす任意の実数 x, y に対して $g > 0$ ならば A の逆行列が存在することを証明せよ。

(3) (2) と同じ条件のもとで, $(x, y) \neq (0, 0)$ を満たす任意の実数 x, y に対して

$$(x \ y) A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$$

となることを証明せよ。

5 曲線 $y = 1 - (x - 1)^2$ と x 軸とで囲まれる図形を考える。

(1) x 軸のまわりに 1 周させて得られる立体の体積を求めよ。

(2) y 軸のまわりに 1 周させて得られる立体の体積を求めよ。