

平成20年度入学理学部数理情報科学科 AO 入学試験

1 次の各問いに答えよ。

(1) 次の定積分を計算せよ。

$$\int_{-3}^3 (5x^3 + 2x^2 + 7x - 4) dx$$

(2) 2つのベクトル $\vec{x} = (a, b)$, $\vec{y} = (c, d)$ が互いに直交し、ともに大きさが1であるとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

を求めよ。

(3) 整数 600 の約数の個数を求めよ。また、その総和を求めよ。

(4) 次の公式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(1-a^n)}{1-a}$$

ただし、 a は 1 ではない定数とする。

(5) 次の分数を小数で表す。このとき、小数点以下に 0 が何個並んだあと、はじめて 0 でない数字が現れるか答えよ。

$$\frac{1}{123456789}$$

(6) 曲線 $y = \log x$ に点 $(0, 2)$ から引いた接線の方程式を求めよ。

2 点 O を中心とする円の直径 AB と、点 A, B とは異なる円周上の点 C がある。点 C から直径 AB へ下ろした垂線を CD とする。さらに、点 D を通り線分 CO に垂直な直線が線分 CO と交わる点を H とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $AD = a$, $BD = b$ とする。線分 CD, CH の長さを a , b で表せ。

(2) (1) を用いて、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

(3) a , b に加えて c , d も正の数とする。次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

(4) (3) の不等式において $d = \frac{a+b+c}{3}$ とおくことにより、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

3 次のような数列を考える。

$$41 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 2} 43 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 4} 47 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 6} 53 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 8} 61 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 10} 71 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 12} 83 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 14} 97 \underbrace{\quad}_{\text{差が } 16} 113 \dots$$

驚くべきことにこの 9 個の数はすべて素数であるし、実はこの先もしばらくは素数が続く。これらの素数はオイラーの素数とよばれている。次の各問いに答えよ。

(1) この数列の第 n 項 a_n を n で表せ。

(2) 実はこの数列にはいずれ素数でない数が入ってしまう。このことを示せ。

4 a と b を並べたものを, a と b からなる文字列という。例えば, a や b , aba や $ababaaabb$ などは, どれも a と b からなる文字列である。 C を

$$\begin{aligned}C(0) &= a, \\C(n+1) &= C(n) b C(n)\end{aligned}$$

と定義すると, C は負でない整数に a と b からなる文字列を対応させる。例えば,

$$\begin{aligned}C(1) &= C(0+1) = C(0) b C(0) = aba, \\C(2) &= C(1+1) = C(1) b C(1) = abababa\end{aligned}$$

となる。また, l を

$$\begin{aligned}l(x) &= 1, \\l(wx) &= l(w) + 1\end{aligned}$$

(ただし, w は a と b からなる文字列であり, x は a または b) と定義すると, l は a と b からなる文字列に自然数を対応させる。例えば,

$$\begin{aligned}l(b) &= 1, \\l(aba) &= l(ab) + 1 = l(a) + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$

となる。このとき, 次の各問いに答えよ。

- (1) $C(3)$ および $l(C(3))$ を求めよ。
- (2) w と w' が a と b からなる文字列であるとき $l(ww') = l(w) + l(w')$ であることに注意して, $l(C(n))$ を求めよ。
- (3) 任意の自然数 n について, 「 $C(n)$ は a と b が交互に並んだ文字列である」ことを証明せよ。