$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを平行移動したグラフをもち, 直線 $y = x - 2$ と点 $(2, 0)$ で接する 2 次関数を求めよ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & x \\ -3 & y \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ x & -2y \end{pmatrix}$ と表されるとする. x, y を求めよ. ただし, $x > 0$ とする. また, このとき, A^2, A^4 を求めよ.

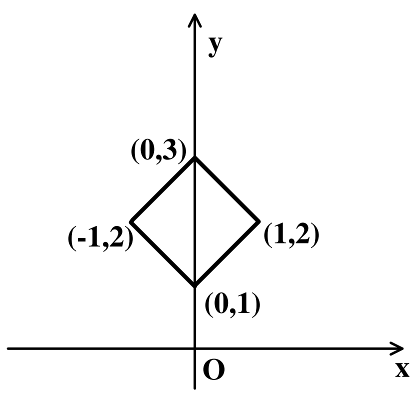
(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された x の関数

$$f(x) = \log_2\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x + 6\right)$$

の最大値とそのときの x の値を求めよ.

(4) 極座標 (r, θ) を使って $r(3 + \cos\theta) = 8$ と表される図形の方程式を (x, y) 座標で表せ. またどのような図形であるか図示せよ.

(5) 図の正方形で囲まれた領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ.



$\boxed{2}$ 座標平面上に異なる 3 点, A, B, C がある. 原点を O とおく. 2 つの条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

をみたせば, $\triangle$ABC は正三角形であることを示せ.

$\boxed{3}$ 時針, 分針, 秒針の 3 本の針が同一の軸につけられている時計において 12 時のところでこの 3 本が重なっている. 次にこの 3 本の針が重なるのは 12 時間後であることを示せ. ただし, 3 本の針はそれぞれ, 回転速度が一定であるとする.

$\boxed{4}$ A,B,C の３人の間で, 将棋の優勝者を以下の方法で決定する.

まず, A と B が対戦する. その勝者は次に C と対戦する. もしここで, 第１試合の勝者が続けて勝てば, その者が優勝である. 第２試合で C が勝った場合は, C は次に第１試合の敗者と対戦する. 以後, 同様に, 「勝者が休んでいた者と対戦する」という規則で, 誰かが２連勝するまで対戦を繰り返す. ２連勝した者が優勝である.

３人は実力が拮抗しており, 各対戦でどちらが勝つ確率も, すべて $\frac{1}{2}$ であるとする.

(1) A がいきなり２連勝して優勝する確率を求めよ.

(2) A が第１試合で負けるものの, もう一度チャンスが回ってきて, ２度目のチャンスで見事２連勝して優勝する確率を求めよ.

(3) A,B,C が優勝する確率を, それぞれ求めよ.

$\boxed{5}$ 0 以上の整数 n と r (ただし $r \leqq n$) に対し次のように定義する.

$$n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\ (n \geqq 1),\quad 0! = 1,\quad {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

(1) ${}_n\mathrm{C}_r$ は n 個のものから r 個取り出す組み合わせの数であることを説明せよ.

(2) $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^r b^{n-r}$ であることを組み合わせの考えを用いて説明せよ.

(3) $\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r = 2^n,\quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r {}_n\mathrm{C}_r = 0$ を示せ.

A を集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ とする. A の部分集合 S に対し, $\#(S)$ で S の元の個数を表す.

(4) A の部分集合の総数は 2^n 個であることを示せ.

(5) 次式を示せ.

$$\sum_{S\subset A} (-1)^{\#(S)} = 0$$

ここで $\sum_{S\subset A}$ は A のすべての部分集合 S に関し足し合わせるという意味である.
例えば, $A = \{1, 2\}$ のときは,

$$\sum_{S\subset A} (-1)^{\#(S)} = (-1)^{\#(\phi)} + (-1)^{\#(\{1\})} + (-1)^{\#(\{2\})} + (-1)^{\#(\{1,2\})}$$

となる. ここで, ϕ は空集合である.