

□1 次の各問に答えよ.

- (1) 関数 $f(x) = 10^x$ を x で微分せよ.
- (2) $3 < \log_2 10 < 4$ となることを示せ.
- (3) 零行列でない 2 行 2 列の行列 A で A^2 が零行列となるものをひとつあげよ.
- (4) x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が 2 つの解 α, β をもつとする. $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ のとき, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ を 2 つの解としてもつ 2 次方程式を a, b, c を用いて表せ.

□2 積分を利用して半径 a の円の面積を求めよ.

□3 関数 $\sin x$ は x の整式ではないことを証明せよ. ただし x の整式とは

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

($a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ は定数) の形をした関数のことである.

□ 階段を登ろうと思います。1歩ごとに、1段登るか1段飛ばしで2段登るかを選びながら登ります。

地面から1段目に上がるには階段の登り方は1通りしかありません。普通に1段を1歩で登るだけです。

地面から2段目まで上がるには2通りの登り方があります。1段ずつ2歩で登る方法と、2段を一気に1歩で登ってしまう方法の2通りです。

地面から3段目まで上がるには3通りの方法があります。1段ずつ3歩で登る方法と、最初の1歩で1段登って残り2段を一気に1歩で登る方法と、最初の1歩で一気に2段登ってから残り1段を登る方法の3通りです。

地面から n 段目まで上がる時、何通りの登り方ができるかの総数を $F(n)$ とします($n = 1, 2, 3, \dots$)。これまで述べたことから

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 2$$

$$F(3) = 3$$

となります。

(1) $F(4)$, $F(5)$ の値を求めよ。

(2) $F(n+2)$, $F(n+1)$, $F(n)$ の間に成り立つ関係式 (漸化式) を導け。

(3) 次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+2} = \begin{pmatrix} F(n) & F(n+1) \\ F(n+1) & F(n+2) \end{pmatrix}$$

(4) 次の2つの等式が成立することを示せ。

$$F(n+1)^2 + F(n)^2 = F(2n+2)$$

$$2F(n+1)F(n) + F(n+1)^2 = F(2n+3)$$