

### 5.4.1 Reyleigh-Benard 対流系

Rayleigh-Benard 対流系

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + g \mathbf{e}_z [1 - \alpha(T - T_0)] + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

Boussinesq 近似 非圧縮近似 ( $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0$ ) 重力による項のみ  $\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$

境界条件

$$u_z(z=0) = u_z(z=H) = 0, \quad (4)$$

$$T(z=0) = T_0, T(z=H) = T_0 + \Delta T \quad (5)$$

$$P(z=0) = P_0 \quad (6)$$

定常解 (熱伝導状態): ( $\mathbf{u} = \partial \mathbf{u} / \partial t = 0, \partial T / \partial t = 0$ )

$$-\frac{d}{dz} P + \rho_0 g [1 - \alpha(T - T_0)] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}T = 0 \quad (8)$$

これを解くと、

$$T_{cond}(z) = T_0 + \frac{\Delta T}{H}z \quad (9)$$

$$P_{cond}(z) = P_0 + \rho_0 g \left( z - \frac{\alpha \Delta T}{2H} z^2 \right) \quad (10)$$

#### 5.4.2 熱伝導状態の線形安定性

$T = T_{cond} + \theta(\mathbf{r}, t)$  として、 $\theta$ 、 $\mathbf{u}$  の線形方程式を求める。(2) と  $\nabla \times \nabla \times (1)$  のフーリエ変換式より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_z(\mathbf{k}) \\ \theta(\mathbf{k}) \\ u_x(\mathbf{k}) \\ u_y(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vk^2 & -g\alpha q^2/k^2 & 0 & 0 \\ -\Delta T/H & -\kappa k^2 & 0 & 0 \\ 0 & g\alpha k_x k_z/k^2 & -vk^2 & 0 \\ 0 & g\alpha k_y k_z/k^2 & 0 & -vk^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_z(\mathbf{k}) \\ \theta(\mathbf{k}) \\ u_x(\mathbf{k}) \\ u_y(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{q} = (k_x, k_y), \quad q^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad k^2 = q^2 + k_z^2 \quad (12)$$

ここで、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$  を使った。 $\theta, \mathbf{u} \propto e^{\lambda t}$  において、特性方程式を求める：

$$(\lambda + vk^2)^2(\lambda^2 + a_k \lambda + b_k) = 0 \quad (13)$$

$$a_k = (\nu + \kappa)k^2 \quad (14)$$

$$b_k = \nu\kappa \left( (k^2)^2 - \frac{q^2 R}{k^2 H^4} \right) \quad (15)$$

$$R = \frac{g\alpha\Delta T H^3}{\nu\kappa} : \text{Rayleigh 数} \quad (16)$$

(13) の解 :

$$\lambda = -\nu k^2 \quad (17)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( -a_k \pm \sqrt{a_k^2 - 4b_k} \right) \quad (18)$$

(17) は常に安定。

一様解の安定性 一様解が安定である条件 :  $\text{Re}\lambda_+ < 0$  かつ  $\text{Re}\lambda_- < 0$

1.  $a_k^2 - 4b_k > 0$  のとき、 $\lambda_{\pm}$  は実根

$$\lambda_+ < 0 \longrightarrow a_k > 0, b_k > 0 \quad (19)$$

2.  $a_k^2 - 4b_k < 0$  のとき ( $b_k > 0$ )、 $\lambda_{\pm}$  は複素数根

$$\text{Re}\lambda_{\pm} < 0 \longrightarrow a_k > 0 \quad (20)$$

よって、一様解が安定であるためには、 $a_k > 0$ ,  $b_k > 0$ 。  
 今の場合、

$$a_k^2 - 4b_k = (\nu - \kappa)^2(k^2)^2 + 4\nu\kappa\frac{q^2R}{k^2H^4} > 0 \quad (21)$$

不安定性のタイプ

$R < R_c$  全ての  $k$  に対して  $a_k > 0, b_k > 0$

$R > R_c$  ある  $k$  に対して  $a_k > 0, b_k < 0$ 。  $b_k \simeq 0$  に対して

$$\lambda_- \simeq -a_k < 0, \quad \lambda_+ \simeq -\frac{b_k}{a_k} > 0 \quad (22)$$

#### 5.4.3 Swift-Hohenberg 方程式

$R_c$  の導出 (15) において、 $R = R_c$  の時  $b_k = 0$  より、

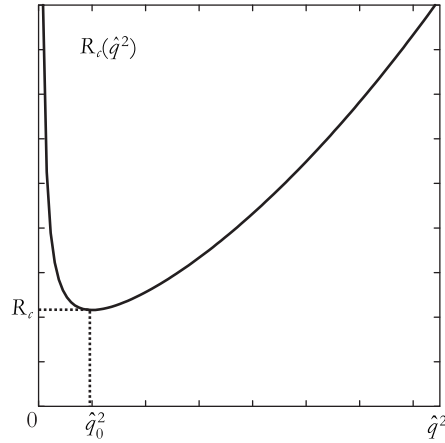
$$R_c(q^2) = \frac{(k^2)^3 H^4}{q^2} = \frac{(\hat{k}^2)^3}{\hat{q}^2}, \quad \hat{k} = Hk, \hat{q} = Hq \quad (23)$$

境界条件 (4) より、

$$k_z = \frac{n\pi}{H} \longrightarrow \hat{k}^2 = \hat{q}^2 + (n\pi)^2 \quad (24)$$

$R_c$  は最初に不安定化する値なので、 $n = 1$  より

$$R_c = \min R_c(\hat{q}^2) = 27(\hat{q}_c^2)^2, \quad \hat{q}_c^2 = \frac{\pi^2}{2}, \quad \hat{k}_c^2 = \frac{3\pi^2}{2} = 3\hat{q}_c^2 \quad (25)$$



$R \simeq R_c, \hat{q}^2 \simeq \hat{q}_c^2$  における  $b(\hat{q}^2)$

$$b(\hat{q}^2) \simeq -\frac{\nu\kappa\hat{q}_c^2}{H^4\hat{k}_c^2}(R - R_c) + f(\hat{q}^2) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} f(\hat{q}^2) &= \frac{\nu\kappa}{H^4} \left( (\hat{k}^2)^2 - \frac{\hat{q}^2}{\hat{k}^2} R_c \right) \\ &= \frac{\nu\kappa}{H^4} \left( (\hat{q}^2 + 2\hat{q}_c^2)^2 - \frac{27(\hat{q}_c^2)^2\hat{q}^2}{\hat{q}^2 + 2\hat{q}_c^2} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$f(\hat{q}^2)$  は、 $f(\hat{q}_c^2) = 0$ 、 $df(\hat{q}^2)/d\hat{q}^2|_{\hat{q}_c^2} = 0$  を満たす。 $f(\hat{q}^2)$  を  $\hat{q}^2 = \hat{q}_c^2$  の周りで展開：

$$\begin{aligned} f(\hat{q}^2) &= \frac{\nu\kappa}{H^4} \left( \{(\hat{q}^2 - \hat{q}_c^2) + 3\hat{q}_c^2\}^2 - \frac{27(\hat{q}_c^2)^2 \{(\hat{q}^2 - \hat{q}_c^2) + \hat{q}_c^2\}}{(\hat{q}^2 - \hat{q}_c^2) + 3\hat{q}_c^2} \right) \\ &\simeq \frac{3\nu\kappa}{H^4} (\hat{q}^2 - \hat{q}_c^2)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

(11) を対角化して、

$$\lambda_+ = \frac{\nu\kappa}{9(\nu + \kappa)H^2\hat{q}_c^2} \left[ (R - R_c) - 9(\hat{q}^2 - \hat{q}_c^2)^2 \right] \quad (29)$$

以外の項を断熱消去すると、高次の項まで含めて、

$$\dot{w} = [\epsilon - (\nabla^2 + q_c^2)^2]w - w^3 = -\frac{\delta F}{\delta w} \quad (30)$$

$$\epsilon = R - R_c, w \propto c_1 u_z + c_2 \theta$$

$$F = \int \left[ -\frac{\epsilon}{2} w^2 + \frac{1}{2} ((\nabla^2 + q_c^2)w)^2 + \frac{1}{4} w^4 \right] d\mathbf{r} \quad (31)$$

と表される（適当なスケール変換を行った）