$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}f(P_\nu)-f(P)\right|^2 dm_P=0$$

が成り立つ. 之も證明略す.

最後に, v. Mises の理論の基礎となつてゐる集團の無秩序性 (§11) を理論上[1]理解させる次の定理を述べて置かう. 賭事をする人は, 今まで事象 A がどう起つたかを調べて次の事象に賭けるか否かを決定して利益を得ようとする傾向がある. 即ち系列 $\sigma=(\cdots a_{-1}\,a_0\,a_1\,a_2\cdots)$ の内第 n 回目の賭の位置 $N(n)$ を $a_0, a_1,\cdots, a_{N(n)-1}$ の値によつて決定する. 併し此のやうな定位選擇を行つても, 期待値に變化はなく, 殆ど確實に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}f(P_{N(\nu)})=\int_\Omega f(P)dm_P\Big/\int_\Omega dm_P.$$

である[2].

§ 74. Weyl の撞球の問題

エルゴードの問題の發生は元來統計力學に於てであつて, L. Boltzmann は始めてエルゴード假説を樹てた. 力學系の時間的發展は嚴密に因果律的であつて確率論の介入する餘地がなささうであるが, 複雑な系例へば氣體(互ひに力を及ぼす甚だ多くの質點の集り)の粗視的性質を論ずるには, 普通の力學の正攻法は到底望みがない. それで何らか平均的操作を加へないと何の結論も引き出せないことになる. 粗視的に氣體を眺める時にはその性質の長時間平均だけが問題となるから, 之を採用する事とし, Boltzmann

1) v. Mises の理論では無秩序性は要請であつて理論上の定理ではない. 大數の法則(若しくは大數の强法則)に就いても同じである

2) 前揭 Hopf の本, p. 58 參照.

は此の時間平均を相空間平均で置き換へた. 氣體の相(=狀態) P に就いて,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(P_t)dt=\int_\Omega f(P)dm_P\Big/\int_\Omega dm_P \qquad (74.1)$$

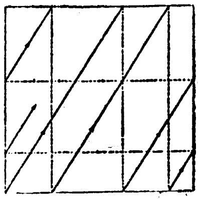
を要請したことになる. Ω: 氣體の相空間或ひはエネルギーの積分などで局限された相空間の一部, m: 相空間の體積或ひは積分面上にそれを換算したもの. 力學の Liouville の定理によつて, 時間變換 $P\to P_t$ に對して m は不變である. 此の等式が成り立てば, 統計力學の基礎假定即ち相空間内に一樣平等なアプリオリ確率を設けて色々な計算を行ふこと(§32)が基礎付けられる.

(74.1)を證明するのが前節で述べた v. Neumann, Birkhoff のエルゴード理論である. 但し, 測度可遷性の假定が必要である. 此の假定はエネルギーの積分を除いてはもはや他の(大局的に一意の)積分が存在しないことと解釋することができよう. 前節では離ればなれの變換 $T, T^2,\cdots$ を考へたのであるが, 連續的な時間變換 T_t を考へてもその移行は別にむづかしい問題ではない. ここではこれらの問題を全面的に說くことを略す. ただ力學的變換の極く簡單な模型として, Weyl の撞球の問題を述べて, 大體どう云ふ内容のものであるかの見當をつけよう.

問題の空間 Ω はやはり正方形 $0\leqq x, y<1$ で, 此の中での直線運動

$$x=t, \qquad y=\omega t \qquad (74.2)$$

を考へる. ω: 或る無理數. 但し, x, y は1を法として考へ, x 又は y が1を越したら1を引いて元の正方形に戻すものとする. 此の直線が正方形をまんべんなく一樣に蔽うてゆくことを示さう. それには, $x=x_0$ なる一直線を軌道が切る點がその直



第 16 圖

線上に一樣に分布することを示せば足りる. $0 \leqq y < 1$ の上で長さ a なる線分 A を考へ, A の特性函數 $f_A(y)$ $(=1, y \in A;\ =0, y \in A')$ を援用すると, n 回直線 $x=x_0$ を過ぎる間交點が A に落ちる數 n_A は

$$\frac{n_A}{n} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f_A(\omega x_0 + \nu\omega) \tag{74.3}$$

で求められる. 但し, y を一々正方形内に戻す煩しさを避けるために, $f_A(y) = f_A(y-1)$ で週期的に正方形外でも f_A を定義して置く. 此のやうな週期函數は Fourier の級數に展開することができる:

$$f_A(y) = c_0 + \sum_{m \neq 0} c_m e^{2\pi i m y}.$$

ところが, $m \neq 0$ の Fourier 成分はいづれも平均に於て零に近づく. 何となれば

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2\pi i m(\omega x_0 + \nu\omega)} = \frac{e^{2\pi i m \omega x_0}}{n} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i m n \omega}}{1 - e^{2\pi i m \omega}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

で, 分母は ω が無理數であるから零でない. ω が有理數ならば軌道は閉ぢてしまつて勿論エルゴード性はない. それで常數項のみが取り殘されて,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f_A(\omega x_0 + \nu\omega) = c_0$$

であるが, c_0 は函數 $f_A(y)$ の $(0, 1)$ での積分であるから, 結局

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} f_A(\omega x_0 + \nu\omega) = \int_0^1 f_A(y)dy = a \ (A\text{ の長さ}) \tag{74.4}$$

が示された. 即ち交點が A に落ちる比較數は A の長さに比例し, 豫想した通りである.

此の證明から瞭かなやうに, 任意の Lebesgue 積分可能の函數 $f(y)$ に就いて,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}f(y_0+\nu\omega)=\int_0^1 f(y)dy. \qquad (74.5)$$

二次元的に考察しても一様平等にまんべんなく軌道が走ることは直觀的に既に瞭であるが，尙解析を附加へる．A を今度は二次元的領域とし，その特性函數 $f_A(x,y)$ を導入する．之も週期的に正方形外まで定義して置く．時間 $(0,t)$ の間動點が A で過す時間 t_A の割合は

$$\frac{t_A}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t f_A(x_t,y_t)dt \qquad (x_t=x_0+t,\ y_t=y_0+\omega t)$$

で求められる．時間 $(0,t)$ を $(0,1),(1,2),\cdots([t],t)$ に別け，$[t]=t$ の整數部分 $=n$ と置けば

$$\frac{t_A}{t}=\frac{1}{n+\{t\}}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_0^1 f_A(x_0+t,y_0+\nu\omega+\omega t)dt+\int_0^{\{t\}}\cdots dt\right\},$$

但し，$\{t\}$: t の小數部分．そこで

$$\int_0^1 f_A(x_0+t,y+\omega t)dt=f(y)$$

とし，之を (74.5) で考へた $f(y)$ とすれば

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t_A}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f_A(x_t y_t)dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}f(y_0+\nu\omega)$$

$$=\int_0^1 f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f_A(x_0+t,y+\omega t)dt$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f_A(x,y)dx\,dy=A\text{ の面積}. \qquad (74.6)$$

即ち比較訪問時間はその領域の面積に比例する．之で二次元的にもエルゴード性が證明されたことになる．同時に任意の Lebesgue 積分可能の函數 $f(x,y)$ に就いて

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^t f(x_t,y_t)dt=\int_0^1\int_0^1 f(xy)dx\,dy \qquad (74.7)$$

が證明されたことになる．そのやうな f は f_A 型のものの一次結合で近似できる．

上の議論は數學的には不正確である．就中 Fourier 級數と，極限平均との操作を勝手に交換してゐる．正しくは平均收斂の意味に解釋しなければならない．

附記．撞球の問題と云ふ言葉にそぐはしい軌道を得るのには上の正方形を色紙を疊む時のやうに四つに折つて透して見れば良い．此の 1/4 の正方形內では軌道は壁に衝突して正反射し，撞球の中心の運動を髣髴させる．之は直觀的ではあるが力學系の模型としては適當ではない．相空間に於ける力學系の軌道は交はることがないからである．