令和 6 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科
博士前期課程　理学専攻数理情報科学プログラム
一般選抜 筆答試験

数学

令和 5 年 8 月 21 日　13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{x}{1+x} \leq \log(1+x)$ $(x \geq 0)$ を示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx$ が収束するか調べよ.

(3) $\sup\left\{\dfrac{3x-1}{5x+1} \,\middle|\, x \geq 0\right\}$, $\inf\left\{\dfrac{3x-1}{5x+1} \,\middle|\, x \geq 0\right\}$ をそれぞれ求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathbf{R}^2$ 上の関数 f を次のように定める.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2 & (x^2+y^2 > 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x^2+y^2 \leq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$t > 0$ について, 図形 A_t を次のように定める.

$$A_t = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y) \leq z \leq t^2\}.$$

(1) 関数 f は $\mathbf{R}^2$ 上連続であることを示せ.

(2) 関数 f は $\mathbf{R}^2$ 上 C^1-級であることを示せ.

(3) 図形 A_t の体積 $V(t)$ は次のように表せることを示せ.

$$V(t) = \pi t^2(t+1)^2 - \iint_{D_t} f(x,y)\,dxdy.$$

ただし, $D_t = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1+t\}$ である.

(4) $V'(t) = \frac{d}{dt}V(t)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 2 以上の整数とし, n 次の正方行列 A は $A^n = O$ かつ $A^{n-1} \neq O$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ が $A^{n-1}\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ を満たすとき, $\{\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{x}\}$ が 1 次独立となることを示せ.

(2) (1) で得られた $\{\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{x}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{x}\}$ は $\mathbf{R}^n$ の基底となることを示せ.

(3) 線形変換 $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の, この基底に関する表現行列を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の全ての固有値を求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有空間の次元を求め, 各固有空間に 1 組の基底を与えよ.

(3) A が対角化されるか調べ, 対角化できるならば $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を与え, 対角行列 $P^{-1}AP$ を答えよ.