令和 02 年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻
数学

令和元年 8 月 19 日　　13:00 - 16:00

注意

(1) 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.

(2) 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.

(3) 出題数は $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題で, 4 題とも解答せよ.

(4) 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.

(5) 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.

(6) 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1 変数関数についての以下の問いに答えよ.

(1) 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 5x dx$$

(2) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ の収束, 発散を判定せよ.

(3) 0 を除く実数上定義された関数 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ は, $x = 0$ での値 $f(0)$ をどのように定めても実数全体 $\mathbb{R}$ 上の連続関数に拡張することはできないことを証明せよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 多変数関数についての以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上定義された次の関数の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2) $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とするとき, $\Delta\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)$ を計算せよ.

(3) 関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を全平面で定義された 2 変数関数とする. f が点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ において全微分可能であることの定義を述べよ.

(4) $\mathbb{R}^2$ 内の単位円盤 D 上での重積分 $\displaystyle\iint_D (-3x^2+1) dx dy$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を正の整数とし，A を n 次の実正方行列とする．任意の非負整数 k に対し，A の k 乗を係数行列とする方程式 $A^k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間を

$$W_k = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A^k\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

で表す．ただし，A^0 は n 次の単位行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 条件 $\dim W_1 = 0$ を満たす行列 A はどのような行列か，五文字以内で述べよ．
(2)「A がべき零行列である」ということに同値な条件を，$\dim W_k$ を用いて与えよ．
(3) $j \leq k$ を満たす任意の非負整数 j, k に対して，$W_j \subseteq W_k$ が成り立つことを示せ．
(4) ある非負整数 j に対して $W_j = W_{j+1}$ ならば，$j \leq k$ なる任意の整数 k に対して $W_j = W_k$ となることを示せ．
(5) $n = 2$ のとき，次元の三つ組 $(\dim W_1, \dim W_2, \dim W_3)$ のとり得る値（例：$(1, 2, 2)$ など）を全て記せ．それぞれについて，実際にその値を与える A の例を具体的に挙げること．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実二次正方行列の全体がなす集合 $M_2(\mathbb{R})$ は，行列の和とスカラー倍により実ベクトル空間となる．さらに，

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とおくと，$M_2(\mathbb{R})$ は $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ を基底とする 4 次元ベクトル空間となる．以上のことを既知とする．

行列 $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対し，写像 $F_A \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

- 任意の $X \in M_2(\mathbb{R})$ に対し，$F_A(X) = AX - XA$

として定める．以下の問いに答えよ．

(1) F_A が線形であることを示せ．行列の和とスカラー倍がもつ性質は自由に用いてよい．
(2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおく．次の (i),(ii) に，a, b, c, d を用いて明示的に答えよ．
  (i) $F_A(E_{11}), F_A(E_{12}), F_A(E_{21}), F_A(E_{22})$ を求めよ．
  (ii) 基底 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ に関する線形変換 F_A の表現行列 M を記せ．
(3) 任意の $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対し，$\mathrm{rank}(F_A) \leq 2$ となることを示せ．