

平成28年度  
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験  
博士前期課程 数理情報科学専攻  
数学

平成28年2月9日(火) 13:00–16:00

注意.

1. 配布物は, 問題冊子 (A4, 3 枚), 解答用紙 (B4, 4 枚), 草案用紙 (B4, 4 枚) である.
2. 試験開始の合図があるまで, 問題冊子を開いてはならない.
3. 出題数は $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$ ,  $\boxed{4}$  の4題で, 4題とも解答せよ.
4. 試験開始後, すべての解答用紙に受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙が不足する場合には裏面を使用してもよい.
6. 問題冊子と草案用紙は持ち帰ること.

**1** 実数を係数とする変数  $x$  の多項式で次数が1次以下のもの全体のなす実ベクトル空間を  $\mathbf{R}[x]_1$ , 実数を成分とする2次の列ベクトル全体のなす実ベクトル空間を  $\mathbf{R}^2$  と書くことにする.

- (1)  $\mathbf{R}[x]_1$  の部分集合  $X$  を  $X = \{1, x\}$  とし,  $f$  を  $X$  から  $\mathbf{R}^2$  への写像とする.  $\mathbf{R}[x]_1$  のベクトル  $ax + b$  を  $af(x) + bf(1)$  に対応させる写像  $T$  は  $\mathbf{R}[x]_1$  から  $\mathbf{R}^2$  への線形写像であることを示せ.
- (2)  $\mathbf{R}[x]_1$  から  $\mathbf{R}^2$  への同型写像を1つあげよ.
- (3) 同型写像でも零写像でもないような  $\mathbf{R}[x]_1$  から  $\mathbf{R}^2$  への線形写像を1つあげよ.

**2**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  とする.

- (1)  $-1$  は  $A$  の固有値であることを示せ.
- (2)  $-1$  に属する  $A$  の固有空間を求めよ.
- (3)  $AP$  の第1列が  $P \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と等しくなるような正則行列  $P$  を1つあげよ. また, その逆行列  $P^{-1}$  を求めよ.

3 平面  $\mathbf{R}^2$  上で定義された 2 変数関数

$$f(x, y) = e^{x^2 - xy + 2y}$$

について, 次の各問いに答えよ.

- (1) 偏導関数  $f_x$  と  $f_y$  を求めよ.
- (2)  $f$  の 2 次の偏導関数  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  を求めよ.
- (3) 次を満たすような実数  $r_0, r_1, r_2$  を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - (r_0 + r_1x + r_2x^2)}{x^2} = 0$$

- (4) 2 次多項式関数  $P(x, y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + b_1x + b_2y + c$  が

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

を満たすとする. このとき  $P(x, y)$  を求めよ.

4 次の各問いに答えよ.

- (1) 次の広義積分を計算せよ.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2}$$

- (2) 広義積分

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x^s(\log x)^2}$$

が  $s \geq 1$  のときに収束することを示せ.

- (3) 平面  $\mathbf{R}^2$  の閉領域  $D$  を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |2x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$$

と定義するとき, 重積分

$$J = \iint_D e^{2x+y} dx dy$$

を求めよ.